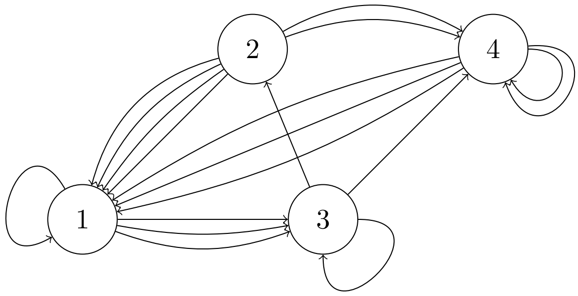
NOM, Prénom : Correction (12 points) .

Soit le multigraphe dirigé ci-dessous, dont les sommets sont déjà numérotés:



Exercice 1. (4 points)

La matrice d'adjacence de ce graphe est

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

et il y a 3.8284 * 10^57 chemins de longueur $13 \leq l \leq 95$ du sommet 2 au sommet 4. Donner le code du calcul effectué:

```
A=[1,4,0,3;0,0,1,0;3,0,1,0;0,2,1,2];
B=zeros(4,4);
for k=13:95
  B=B+A^k;
endfor
B(4,2)
```

Calculer

$$A^3 = \begin{pmatrix} 22 & 22 & 26 & 21 \\ 6 & 12 & 1 & 9 \\ 9 & 42 & 22 & 36 \\ 18 & 20 & 13 & 17 \end{pmatrix}$$

et expliquer pourquoi on peut en déduire que ce graphe est *primitif.*

De manière générale, l'élément en position (i,j) dans A^k est égal au nombre de chemins de longueur k du sommet j au sommet i dans le multigraphe dirigé dont A est la matrice d'adjacence. Ici, tout élément de A^3 est strictement positif. On peut donc en déduire qu'il existe, pour tout sommet i et tout sommet j, au moins un chemin de longueur k=3 les reliant. Ceci correspond à la définition de "graphe primitif": il existe un nombre k tel que toute paire de sommets peut être reliée par un chemin de longueur k.

Exercice 2. (4 points)

La matrice stochastique et le vecteur stationnaire du graphe ci-dessus sont

$$M = \begin{pmatrix} 1/4 & 2/3 & 0 & 3/5 \\ 0 & 0 & 1/3 & 0 \\ 3/4 & 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & 1/3 & 1/3 & 2/5 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad S = \begin{pmatrix} 0.3000 \\ 0.1125 \\ 0.3375 \\ 0.2500 \end{pmatrix}.$$

Que représentent les éléments du vecteur stationnaire? A quoi peut servir un vecteur stationnaire?

Le vecteur stationnaire est une distribution de probabilités: l'élément en position i donne la probabilité de passage au sommet i d'un ("assez long") chemin dans le graphe. Ce vecteur S peut servir à classer les sommets d'un graphe selon les probabilités de passage de chemins.

Exercice 3. (4 points)

Qu'est-ce qu'on entend par la "matrice de Google" d'un multigraphe dirigé? Donner la formule et expliquer-la brièvement.

Formule: G=alpha*M + (1-alpha)*U_n

Ici, M est la matrice stochastique d'un graphe donné (disons à n sommets); alpha est un nombre entre 0 et 1; U_n est la matrice de genre nxn dont chaque élément vaut 1/n.

La matrice G est une nouvelle matrice stochastique qui, avec probabilité alpha, tient compte du graphe donné, et, avec probabilité 1-alpha, ajoute de l'aléatoire au modèle.

Une telle matrice de Google est *primitive* (et non-seulement *irréductible*). Pourquoi est-ce important (pour les applications "à grande échelle")?

Lorsqu'une matrice stochastique M est primitive, on peut calculer (approcher) son unique vecteur stationnair S par la Méthode des Puissances Itérées: S = M^k*I (où I est une distribution initiale quelconque). Pour des très grandes matrices, la résolution du système linéaire M*S=S est impossible (ou trop coûteux en temps, en ressources,...) alors que la Méthode des Puissances Itérées reste possible.