Examen écrit – Mathématiques 8

1. On dira qu'une matrice carrée $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ est *infime* si $A^2 = O$ (où O est la matrice nulle).
   (a) Donner un exemple d'une matrice non-nulle infime pour $n = 2$.
   (b) Montrer: si $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ est infime, alors A n'est pas inversible.
   (c) A-t-on la réciproque de l'assertion en (b)? Donner une démonstration ou un contre-exemple.
   (d) Montrer: si $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ est infime, alors $\mathrm{Im}(A) \subseteq \mathrm{Ker}(A)$.
   (e) A-t-on la réciproque de l'assertion en (d)? Donner une démonstration ou un contre-exemple.

2. Calculer l'inverse de la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 5 \\ 5 & 6 & 0 \end{pmatrix}$ ou expliquer pourquoi ce n'est pas possible.

3. Calculer le polynôme d'interpolation des points $(0, 2)$, $(1, 0)$, $(2, 0)$ et $(3, 8)$ de $\mathbb{R}^2$.

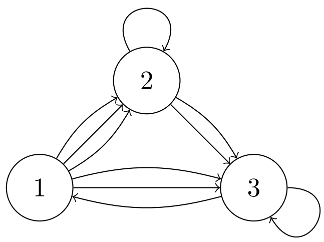
Examen écrit – Mathématiques 9

4. Calculer les coefficients a et b de l'équation $y = ax + b$ de la droite passant au plus près des points $(0, 2)$, $(1, 0)$, $(2, 0)$ et $(3, 8)$ de $\mathbb{R}^2$.

5. Diagonaliser la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ par une matrice orthogonale.

6. Calculer les valeurs singulières de la matrice $\begin{pmatrix} 5 & 1 & -4 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$.

7. Soit le multigraphe suivant:



   (a) Ce graphe, est-il régulier? primitif? Justifier vos réponses.
   (b) Donner la matrice d'adjacence et la matrice stochastique de ce graphe.
   (c) Ecrire le code pour calculer avec Octave/Matlab le nombre de chemins de longueur $13 \leq l \leq 77$ du sommet 3 au sommet 1 dans ce graphe.
   (d) Qu'est-ce qu'on entend par le *vecteur stationnaire* de ce graphe? Quel est son utilité?

——— *fin* ———

Partie A

1. (a) Qu'est-ce qu'une matrice 'symétrique'?
   (b) Donner un exemple d'une matrice symétrique.

   Soient maintenant $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ deux matrices symétriques quelconques. Démontrer que:

   (c) la somme $A + B$ est toujours une matrice symétrique,
   (d) le produit AB n'est pas toujours une matrice symétrique. (On peut donner un contre-exemple pour $n = 2$.)

2. (a) Echelonner la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.
   (b) En déduire une factorisation $PA = LU$.
   (c) La matrice A, est-elle inversible? Justifier la réponse.

3. (a) Qu'est-ce qu'une matrice 'à colonnes libres'?

   Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 & 0 & 1 \\ -6 & -3 & 4 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & -7 & 5 & -7 \end{pmatrix}$.

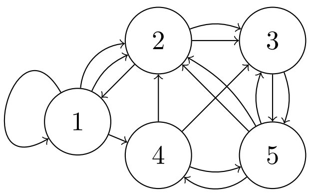
   (b) Calculer une sous-matrice $\overline{A}$ à colonnes libres de A, ayant la même image que A.
   (c) Donner le rang et la nullité de A (et justifier la réponse).

Partie B

4. Calculer les coefficients a et b de l'équation $y = ax + b$ de la droite passant au plus près des points $(-1, 4)$, $(0, 5)$, $(1, 4.5)$, $(2, 5)$ du plan $\mathbb{R}^2$.

5. Diagonaliser la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ ou expliquer pourquoi ce n'est pas possible.

6. (a) Donner la matrice d'adjacence du graphe ci-joint.
   (b) Ecrire un script d'Octave pour calculer le nombre de chemins de longueur $34 \le l \le 56$ du sommet 1 au sommet 3 dans ce graphe.



7. (a) Calculer la matrice $M = \texttt{stoch}\begin{pmatrix} 3 & 3 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$.
   (b) Calculer M^3.
   (c) Comment expliquer que les colonnes de M^3 se ressemblent?
   (d) A quoi peut servir cette observation?

Partie A

1. On dit qu'une matrice $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ est *puissante* si $A \cdot A = A$. Bien sûr, pour la matrice unité I_n et la matrice nulle O cette équation est satisfaite: ce sont les matrices puissantes *triviales*.
(a) Pour $n = 2$, donner un exemple non-trivial de matrice puissante.
(b) Démontrer: si A est puissante, alors $I_n - A$ l'est aussi.
(c) Quelles valeurs peut avoir le déterminant d'une matrice puissante A? Justifier votre réponse!
(d) Démonter qu'une matrice A est inversible et puissante si et seulement si $A = I_n$.
(e) Démontrer que l'unique élément de l'intersection $\mathrm{Ker}(A) \cap \mathrm{Im}(A)$ est la colonne nulle.

2. (a) Echelonner la matice suivante et en déduire une factorisation $PA = LU$:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 5 & -2 & 1 & -3 \\ 6 & 2 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 4 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

(b) Calculer une matrice M à colonnes libres dont l'image est le noyau de A.
(c) En déduire le rang de A.

3. Calculer le polynôme d'interpolation des points $(-1, -\frac{5}{2})$, $(0, -1)$, $(1, \frac{3}{2})$, $(2, -1)$ de $\mathbb{R}^2$.

Partie B

4. Calculer une factorisation QR de la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 5 \\ 0 & 3 & 6 \end{pmatrix}$.

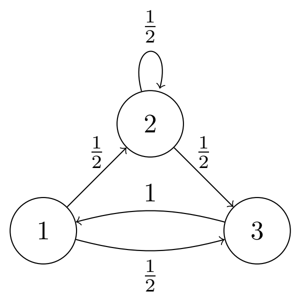
5. (a) Définir 'matrice diagonalisable'.
(b) Illustrer l'utilité des matrices diagonalisables par un exemple vu dans le cours.
(c) Pour chacune des matrices suivantes, dire si elle est diagonalisable ou pas, en justifiant votre réponse:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 & 5 & -1 \\ -1 & 1 & 2 & 6 & 3 \\ 4 & 2 & 3 & -1 & 0 \\ 5 & 6 & -1 & 1 & 2 \\ -1 & 3 & 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -7 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 1 & 8 \end{pmatrix}$$

(d) Diagonaliser la matrice $M = \begin{pmatrix} 2 & -\frac{3}{2} \\ -9 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

6. Calculer l'équation de la droite passant au plus près des points $(-1, -\frac{5}{2})$, $(0, -1)$, $(1, \frac{3}{2})$, $(2, -1)$ de $\mathbb{R}^2$.

7. On considère le jeux suivant: on choisit au hasard une position initiale parmi trois positions possibles; et ensuite le hasard décide aussi quel mouvement on fait, selon les probabilités données dans le graphe suivant:



(a) Donner la matrice stochastique associée (avec les notations du cours).
(b) Calculer son vecteur stationnaire.
(c) Expliquer brièvement (max. 5 lignes) l'interprétation de ce dernier résultat.

——— *fin* ———

Partie A

1. (a) Calculer une factorisation LU de la matrice
$$A = \begin{pmatrix} -4 & 4 & -7 & -7 \\ 6 & -1 & 10 & 15 \\ 2 & -1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$
(b) Donner le rang et la nullité de A.
(c) Donner une matrice B à colonnes libres dont l'image est le noyau de A.

2. Calculer le polynôme d'interpolation des points $(0,1)$, $(1,1)$, $(2,2)$, $(3,2)$.

3. On dit qu'une matrice $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ est *antisymétrique* si $A^t = -A$.
(a) Donner un exemple d'une matrice antisymétrique non-nulle pour $n = 3$ et pour $n = 4$.
(b) Montrer, <u>pour $n = 2$</u>, que toute matrice antisymétrique non-nulle est inversible.
(c) Montrer, <u>pour n impair</u>, que toute matrice antisymétrique est non-inversible.

Partie B

4. (a) Qu'est-ce qu'on entend par "la factorisation QR" d'une matrice A?
(b) Pour une telle factorisation, démontrer que $\mathrm{Im}(A) = \mathrm{Im}(Q)$.
(c) Expliquer l'utilité de cette factorisation pour calculer la projection orthogonale sur $\mathrm{Im}(A)$.

5. Diagonaliser la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ par une matrice orthogonale.

6. Soit
$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{2}{\sqrt{21}} & \frac{1}{\sqrt{7}} \\ 0 & -\frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{2}{\sqrt{21}} & \frac{1}{\sqrt{7}} \\ 0 & 0 & -\frac{3}{\sqrt{21}} & \frac{2}{\sqrt{7}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{2}{\sqrt{21}} & -\frac{1}{\sqrt{7}} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$
(a) Montrer que le premier facteur dans ce produit matriciel est une matrice orthogonale.
(b) Donner le rang de A (et justifier la réponse).
(c) Calculer une solution approchée au système $A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ (et justifier la méthode utilisée).

——— *fin* ———