Université du Littoral **Année universitaire 2011-2012**
Master 2 ème année **Métiers de l'Enseignement en Mathématiques**

Préparation écrit analyse

Séance 6 : Séries entières, séries de Fourrier

---

1. Séries entières

Exercice 1. Recherche des rayons de convergence et étude sur le cercle de convergence des séries suivantes.

1. $u_n = \dfrac{z^n}{n!}$, $z \in \mathbb{C}$;

2. $u_n = \dfrac{z^n}{\log n}$, $z \in \mathbb{C}$;

3. $u_n = (nx)^n$, $x \in \mathbb{R}$;

4. $u_n = \dfrac{(-1)^n z^{2n}}{n!}$, $z \in \mathbb{C}$;

5. $u_n = i^n z^n$, $z \in \mathbb{C}$

6. $u_n = n^{(-1)^n} z^n$, $z \in \mathbb{C}$;

Exercice 2. Pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, $a \in \mathbb{C}^*$, déterminer le développement en série entière de

$$\frac{1}{(z-a)^p}.$$

Exercice 3.

1. Trouver le développement en séries entières des fonctions

$$f(x) = \frac{2x-1}{x^2-5x+6} \quad \text{et} \quad g(x) = \frac{x-2}{2x-1}.$$

2. Quels sont les rayons de convergence ?

3. Faire le produit des deux séries trouvées.

4. Quel est le rayon de convergence de la série produit ?

Exercice 4. Déterminer le développement en séries entières de

$$f(x) = \frac{x^2+x-3}{(x-2)^2(2x-1)}$$

et préciser son rayon de convergence.

Exercice 5. On considère l'équation différentielle :

$$(E) \qquad xy'' + 3y' - 4x^3y = 0$$

Montrer qu'il existe une solution et une seule de (E), notée f, développable en série entière autour de l'origine telle que $f(0) = 1$. On recherchera cette solution sous la forme

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n.$$

Reconnaître $f(x)$ comme expression de fraction élémentaires.

Exercice 6.

1. Pour quelles valeurs de z la série entière $\sum \frac{z^{n\,2}}{n}$ est-elle convergente ?

Pour tout $x \in [-1, 1]$, posons $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n^2}$.

2. Montrer que la fonction f est continue sur $[-1, 1]$ et calculer $f'(x)$ pour tout $x \in]-1, 1[$.

3. Montrer qu'il existe un nombre réel c tel que, pour tout $x \in]0, 1[$, on a

$$f(x) + f(1 - x) = c - (\ln x)(\ln(1 - x))$$

4. Calculer le nombre c. En déduire la valeur

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^n n^2}.$$

2. Séries de Fourier

Exercice 7.

1. Développer en série de Fourrier la fonction 2π-périodique, impaire, égale à 1 sur $]0, \pi[$.

2. En déduire la valeur de

$$\sum_{n \geqslant 0} \frac{\sin(2n + 1)x}{2n + 1}, \quad x \in]0, \pi[.$$

Exercice 8.

1. Développer en série de Fourier la fonction 2π-périodique $f(x) = |x|$ si $|x| \leqslant \pi$.

2. En déduire les valeurs de

$$\sum_{n \geqslant 0} \frac{1}{(2n + 1)^2} \quad \text{et} \quad \sum_{n \geqslant 1} \frac{1}{n^2}.$$

3. En utilisant le théorème de Parseval, calculer

$$\sum_{p \geqslant 0} \frac{1}{(2p + 1)^4} \quad \text{et} \quad \sum_{n \geqslant 1} \frac{1}{n^4}.$$