

Préparation écrit analyse
Séance 7 : Beaucoup de choses ...

1. INTÉGRALES MULTIPLES

Exercice 1. Calculer les intégrales suivantes :

1. $\int \int_{\Delta} xy \, dx \, dy$ où Δ est la partie de plan limité par $y = x^2$ et $x = y^2$.
2. $\int \int_{\Delta} (x^2 + y^2) \, dx \, dy$ où Δ est l'intérieur de l'ellipse fermé : $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1$, $a > 0$, $b > 0$.
3. $\int \int_{\Delta} \frac{1}{1 + x^2 + y^2}$ où Δ est le disque fermé de centre $(0, 0)$ et de rayon 1.

Exercice 2. Calculer l'aire d'une cardioïde $\rho = a(1 + \cos \theta)$.

Exercice 3. Calculer le volume de la sphère à l'aide

1. D'un changement de variables en coordonnées cylindriques
2. D'un changement de variables en coordonnées sphériques

2. APPLICATIONS DE \mathbb{R}^n DANS \mathbb{R}^p

Exercice 4. Soient $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ définie par $g(x, y) = \frac{x^2 y}{x^4 + y^2}$ si $(x, y) \neq (0, 0)$ et $g(0, 0) = 0$

1. Montrer que si $(x, y) \rightarrow (0, 0)$ sur l'axe $x = 0$ ou $y = 0$, $g(x, y) \rightarrow 0$.
2. Montrer que si $(x, y) \rightarrow (0, 0)$ sur la parabole $y = x^2$, $g(x, y) \not\rightarrow 0$.
3. En déduire que g est discontinue en $(0, 0)$ bien que continue par rapport à x et continue par rapport à y .

Exercice 5. Soit $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $g(x, y) = \frac{\sin(x - y)}{x - y}$ si $x > y$ et $g(x, y) = 1$ si $x \leq y$.
Sur quelle partie de \mathbb{R}^2 la fonction g est-elle continue ?

Exercice 6. Soit $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $g(x, y) = \frac{\sin(x - y)}{x - y}$ si $x > y$ et $g(x, y) = 1$ si $x \leq y$.
Sur quelle partie de \mathbb{R}^2 la fonction g est-elle continue ?