Préparation écrit analyse

Séance 2 : Norme de $\mathbb{R}^n$

Definition 1.

• Soit E un $\mathbb{R}$ espace vectoriel ($\mathbb{R}$ par exemple), on dit qu'une application $N : E \to \mathbb{R}_+$ est une norme sur E si
– $\forall x \in E,\ N(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$;
– $\forall (x, \lambda) \in E \times \mathbb{R},\ N(\lambda x) = |\lambda| N(x)$;
– $\forall (x, y) \in E^2,\ N(x + y) \leqslant N(x) + N(y)$.
Dans ce cas, on dit que (E, N) est un espace vectoriel normé.

• Deux normes N_1 et N_2 sur E sont dites équaivalentes (on note alors $N_1 \sim N_2$) si et seulement s'il existe $(a, b) \in (\mathbb{R}_{>0})^2$ tel que $aN_1 \leqslant N_2 \leqslant bN_1$.

Definition 2. Soit $(u_n)_n$ une suite d'un (E, N).
– On dit que $(u_n)_n$ est convergente de limie ℓ si $\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \geqslant N,\ N(u_n, \ell) < \varepsilon$.
– On dit que $(u_n)_n$ est de Cauchy si $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N},\ \forall p \geqslant q \geqslant N,\ N(u_p, u_q) < \varepsilon$.
– On dit que (E, N) est complet si toute suite de Cauchy de (E, N) est une suite convergente.

Definition 3. Soit (E, N) un espace vectoriel normé, x un élément de E et $r \in \mathbb{R}_{\leqslant 0}$. On note
– $B(x, r) = \{y \in E \mid N(x - y) < r\}$, la boule ouverte de centre x et de rayon r.
– $\bar{B}(x, r) = \{y \in E \mid N(x - y) \leqslant r\}$, la boule fermée de centre x et de rayon r.

Definition 4. Soit (E, N) un evn et A un sous-ensemble de E.
– On dit que A est fermé si toute suite convergente à valeur dans A a sa limite dans A.
– On dit que A est ouvert si pour tout $x \in A$, il existe $r > 0$ tel que $B(x, r) \subseteq A$.
– On dit que A est bornée s'il existe $r > 0$ et $x \in E$ tels que $A \subseteq B(x, r)$.
– On dit que A est un compact si A est ouvert et fermé.
– On appelle intérieur de A l'ensemble $A^\circ = \{x \in A \,|\, \exists r > 0,\ B(x, r) \subseteq A\}$.
– On appelle adhérence de A dans E l'ensemble $\bar{A} = \{x \in E \,|\, \forall r > 0,\ B(x, r) \cap A \neq \emptyset\}$.
– On appelle fronctière de de A l'ensemble $\bar{A} \setminus A^\circ$.

Exercice 1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $x = (x_1, ..., x_n)$ de $\mathbb{R}^n$, on pose

$$||x||_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|, \quad ||x||_2 = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \right)^{\frac{1}{2}}, \quad ||x||_\infty = \sup_{1 \leqslant i \leqslant n} |x_i|.$$

1. Montrer que ce sont trois normes de $\mathbb{R}^n$.

2. Montrer que ces normes sont équivalentes.

3. Pour $n = 2$, représenter $B(0, 1)$ pour ces trois normes.

Exercice 2. Soient a et b deux réels strictements positifs. Pour tout (x, y) de $\mathbb{R}^2$, on pose $N(x, y) = \sqrt{a^2x^2 + b^2y^2}$.

1. Montrer que l'application $N : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ est une norme.

2. Soit r un réel strictement positif. Dessiner la boule de centre $(0, 0)$ et de rayon r pour la norme N.

3. Montrer que N est équivalente à $||.||_2$.

Exercice 3. Dans $\mathbb{R}^2$ muni de la norme usuelle, trouver l'adhérence et la frontière de

1. $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, (x, y) \neq (0, 0)\}$,

2. $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x^3 > y^2\}$.

Exercice 4.

1. Montrer que la réunion quelconque d'ouverts de (E, N) est un ouvert mais que ce n'est pas vraie pour l'intersection.

2. Montrer que l'intersection quelconque de fermés de (E, N) est un fermé mais que ce n'est pas vraie pour l'union.

Exercice 5. Montrer que $\mathbb{Q}$ muni de la norme usuelle n'est pas complet.

Exercice 6. On considére $\mathbb{R}$ muni de la norme usuelle. Montrer que $\mathbb{Q}$ est une partie de $\mathbb{R}$ qui n'est ni ouvert, ni fermé.

Exercice 7. Soient (E, N) et (F, N') deux espaces vectoriels normés, A un sous ensemble de E et f une application de E dans F. **1.** Donner la définition de "f continue sur A"

2. Si $A = E$ et est un ouvert de F, montrer que $f^{-1}(O) = \{x \in A \,|\, f(x) \in B\}$ est un ouvert de E.

Exercice 8. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x, y) = \max(x^2, y^2)$.

1. Dessiner les ensembles $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, f(x, y) = a\}$ pour $a = 0, 1, 2, 4$.

2. Montrer que f est continue

3. Soit a un nombre réel positif ou num. Montrer que l'ensemnle $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, f(x, y) = a\}$ est une partie compact de $\mathbb{R}^2$.

Exercice 9. Montrer que les parties suivantes sont des compacts, où $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{C}^n$ sont munis de la norme usuelle.

1. $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x^2 + xy + y^2 \leqslant 1\}$,

2. $B = \{x \in \mathbb{R} \,|\, \exists (u, v) \in \mathbb{R}^2,\ x = \sin(u^2 + v^2)\}$,

3. $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, y^2 = x(1 - x)\}$,

4. $D = \{z \in \mathbb{C} \,|\, \exists t \in [-1.1],\ z = t^2 + t^3 i\}$.

Exercice 10. Soient $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ des applications et $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ l'application définie par $h(x, y) = f(x) + g(y)$. Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$.

1. Monter que si f est continue en a et si g est continue en b, alors h est continue en (a, b).

2. On suppose que h est continue en (a, b). l'application f est-elle continue en a ? L'application g est-elle continue en b ?

Exercice 11. Montrer que les applications suivantes sont continues :

1. $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ définie par $f(x, y, z) = \left(\frac{x \sin y}{y}, z + y^2\right)$ si $y \neq 0$ et $f(x, 0, z) = (x, z)$.

2. $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par $f(x, y) = \dfrac{x \sin(xy)}{x^2 + y^2}$ si $(x, y) \neq (0, 0)$ et $f(0, 0) = 0$.

Exercice 12. Soient E et F deux espaces vectoriels normé et $\phi : E \to F$ une application linéaire. Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes :

(1) ϕ est continue en 0,

(2) ϕ est continue sur E,

(3) ϕ est uniformément continue sur E,

(4) ϕ est lipschitzienne.

Théorème 1 (Bolzano-Weierstrass). *Soit A une partie compacte de $\mathbb{R}^p$ et soit (u_n) une suite d'éléments de A. Alors il existe $a \in A$ ayant la propriété suivante :*

$$\forall \varepsilon > 0 \,, \forall q \in \mathbb{N} \,, \exists n, ||u_n - a||_\infty < \varepsilon.$$

Exercice 13. Soit A une partie de $\mathbb{R}^n$ muni de la norme usuelle et $f : A \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Montrer que si A est un compact, alors il existe un positif K tel que, pour tout $x \in A$, on ait $|f(x)| \leqslant K$.

Théorème 2. *Si E un espace vectoriel de dimension finie sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ alors toutes les normes de E sont équivalentes.*

Exercice 14. Soient E et F des espaces vectoriels sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et ϕ une application linéaire de E dans F. Montrer que si E est de dimension finie alors ϕ est une continue.

Exercice 15. Dire si les ensembles suivants sont ouverts ou fermés :

1. $GL_n(\mathbb{R})$ dans $M_n(\mathbb{R})$,

2. $SL_n(\mathbb{R})$ dans $M_n(\mathbb{R})$,

3. $O_n(\mathbb{R})$ dans $M_n(\mathbb{R})$,

4. Parmi ceux qui sont fermés, lesquels sont des compacts ?