Université du Littoral | **Année universitaire 2011-2012**
Master 2 ème année | **Métiers de l'Enseignement en Mathématiques**

Préparation écrit analyse

Séance 2 : Fonctions réelles, dérivation, intégration.

---

1. Fonction réelles ou complexes d'une variable réelle.

Exercice 1. Trouver toutes les applications $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ telles que

$$\forall x \in \mathbb{R}^*,\ f(x) + 3f\left(\frac{1}{x}\right) = x^2.$$

Exercice 2. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application telle que

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) \neq 3 \text{ et } f(x+1) = \frac{f(x)-5}{f(x)-3}.$$

Montrer que f est 4-périodique.

Exercice 3. On note $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{si } x < -1 \\ 0 & \text{si } -1 \leqslant x \leqslant 1 \\ x-1 & \text{si } 1 < x. \end{cases}$$

1. Tracer la représentation graphique de f
On note $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, y \mapsto g(y) = \inf\{x \in \mathbb{R},\ f(x) > y\}$.
2. Montrer que g est correctement définie et calculer $g(y)$ pour tout y de $\mathbb{R}$.
3. Tracer la représentation graphique de g.
4. Préciser $g \circ f$ et $f \circ g$ et tracer leurs représentations graphiques.

Exercice 4. Montrer que la fonction $\cos$ n'a pas de limite en $+\infty$.

Exercice 5. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue sur $\mathbb{R}$ et s'annulant en tout point de $\mathbb{Q}$. Montrer $f = 0$.

Exercice 6. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue. On suppose que f n'a pas de point fixe. Monter que $f \circ f$ n'a pas de point fixe.

Exercice 7. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue et décroissante. Montrer que f admet un point fixe et un seul.

Exercice 8. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ continue et périodique. Montrer que f est bornée.

Exercice 9. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue et 1-périodique. Montrer

$$\forall a \in]0, +\infty[,\ \exists c \in \mathbb{R}, f(c+a) = f(c).$$

Exercice 10. Montrer que l'application $f : x \to \sqrt{x}$ est uniformément continue sur $\mathbb{R}_+$.

2. Dérivation

Exercice 11. Soit $(a,b) \in]0,+\infty[^2$ tel que $a < b$. Montrer que l'application

$$f :]0,+\infty[\to \mathbb{R}, x \mapsto f(x) = \frac{\ln(1+ax)}{\ln(1+bx)}$$

est strictement croissante.

Exercice 12. Combien le polynôme $P = X^5 - 80X + 7$ a-t-il de zéros réels ?

Exercice 13. Calculer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la dérivée n-ème des fonctions suivantes :

1. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto f(x) = (x^2 - x + 2)e^x$.

2. $f :]-1,1[\to \mathbb{R}, x \mapsto f(x) = \dfrac{1}{x^3 - x^2 - x + 1}$

3. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto f(x) = \cos^2 x \sin x$.

Exercice 14. Etudier la continuité, la dérivabilité et la continuité de la dérivée pour $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

Exercice 15. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application telle que, pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $x \neq y$:

$$|f(x) - f(y)| \leqslant |x-y|^{\frac{3}{2}} \left|\ln|x-y|\right|.$$

Montrer que f est constante.

Exercice 16. Soit $f : [-1,1] \to \mathbb{R}$ de classe C^1, s'annulant en $-1, 0, 1$. On note

$$g : [-1,1] \to \mathbb{R}, x \mapsto g(x) = 2x^4 + x + f(x).$$

Montrer qu'il existe $c \in]-1,1[$ tel que $g'(c) = 0$.

Exercice 17. Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $a_1, ..., a_n \in \mathbb{R}$ tels que $\sum_{k=1}^n a_k = 0$. Montrer que l'équation

$$\sum_{k=1}^n k a_k x^{k-1} = 0$$

admet au moins une solution pour $x \in]0,1[$.

Exercice 18. Soit $f : [-1,1] \to \mathbb{R}$ de classe C^1 sur $[-1,1]$, deux fois dérivables sur $]-1,1[$ avec $-1, 0, 1$ comme points fixes. Montrer qu'il existe c dans $]-1,1[$ tel que $f''(c) = 0$.

Exercice 19. Calculer

$$\inf_{x \in \mathbb{R}} \left(\sqrt{(x-1)^2 + 9} + \sqrt{(x-8)^2 + 16} \right)$$

Exercice 20. Soit $f : [0,+\infty[\to \mathbb{R}$ convexe. Montrer que, s'il existe $(a,b) \in]0,+\infty[^2$ tel que $a < b$ et $f(a) < f(b)$, alors

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty.$$

Exercice 21.

1. Vérifier que l'application $f :]0,+\infty[\to \mathbb{R}, x \mapsto f(x) = -\ln x$ est convexe.

2. En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $(x_1, ..., x_n) \in (\mathbb{R}_+^*)^n$:

$$\sqrt[n]{x_1 \cdots x_n} \leqslant \frac{x_1 + ... + x_n}{n}.$$

Exercice 22. Soient $a \in]0, +\infty[$, $f : [0, a] \to \mathbb{R}$ de classe C^1 telle que $f(0) = 0$. Montrer

$$\exists c \in]0, a[, f'(c) = \frac{2f(a) + af'(a)}{3a}.$$

Exercice 23. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que $\deg(P) \geq 2$.

1. Montrer que, si les zéros de P sont tous réels et simples alors il en est de même pour P'.

2. Monter que, si P est scindé sur $\mathbb{R}$, alors P' l'est aussi.

Exercice 24. Monter que pour tout x de $]0, \frac{\pi}{2}[$, on a

$$\left(\frac{\sin x}{x}\right)^3 > \cos x.$$

Exercice 25. Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $a_1, ..., a_n \in]0, +\infty[$ tels que $\sum_{i=1}^n a_i = 1$. Montrer

$$\sum_{i=1}^n \left(a_i + \frac{1}{a_i}\right)^2 \geqslant \frac{(n^2+1)^2}{n}.$$

3. Intégration

Exercice 26. Soit $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ continue. On note $M = \sup_{x \in [0,1]} |f(x)|$. Montrer

$$\left| \int_0^1 (f(x) + xf(1-x))\, \mathrm{d}x \right| \leqslant \frac{3}{2} M.$$

Exercice 27. Calculer

$$I = \int_0^{2\pi} \sqrt{\frac{1 + \cos x}{2}}\, \mathrm{d}x.$$

Exercice 28. Déterminer

$$\inf_{a \in \mathbb{R}} \int_0^1 (x^2 - ax)^2\, \mathrm{d}x.$$

Exercice 29. Déterminer les limite suivantes :

$$\lim_{n \to +\infty} \int_0^1 \frac{x^n}{1+x}\, \mathrm{d}x, \quad \lim_{n \to +\infty} \int_0^\pi \frac{\sin x}{x+n}\, \mathrm{d}x, \quad \lim_{n \to +\infty} \int_0^1 \sqrt{1+x^n}\, \mathrm{d}x.$$

Exercice 30. Calculer

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(1 + \tan x)\, \mathrm{d}x$$

Exercice 31.

1. Montrer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \leqslant 1 + \ln n.$$

2. En déduire : $\sum_{d|n} d \leqslant n(1 + \ln n)$.

Exercice 32. Dans chacun des cas suivants, montrer que la suite dont on donne le terme converge, et calculer sa limite :

$$u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{n^2 + 2kn}}, \qquad v_n = \prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{k^2}{n^2}\right)^{\frac{1}{n}}, \qquad w_n = \sum_{k=1}^n \sin\frac{k}{n^2} \sin\frac{k}{n}.$$

Exercice 33. Soit $f : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}$ de classe C^2 et convexe. Montrer $\int_0^{2\pi} f(x) \cos x\, \mathrm{d}x \geqslant 0$.

Exercice 34. Déterminer l'ensemble des applications $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ continues, telles que $f \geqslant 0$ et que

$$\forall x \in [0, +\infty[,\ f(x) \leqslant \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Exercice 35. Soient $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ continue et $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ convexe. Montrer

$$\varphi\left(\int_0^1 f\right) \leqslant \int_0^1 \varphi \circ f$$

Exercice 36. Soient $k \in \mathbb{R}$ et $f = [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ une application k-lipschitzienne. On considère l'application $F : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ définie par

$$F(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t & \text{si } x \neq 0. \\ f(0) & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

Montrer que F est $\frac{k}{2}$-lipschitzienne.

Exercice 37. Déterminer les limites suivantes :

$$\lim_{u \to +\infty} \int_0^\pi e^{-u \sin x}\,\mathrm{d}x, \qquad \lim_{u \to +\infty} e^{-u^2} \int_0^u e^{x^2}\,\mathrm{d}x.$$

4. Fonctions usuelles

Exercice 38. Résoudre dans $\mathbb{R}$:

1. $3^x + 4^x = 5^x$;

2. $\arcsin x + \arcsin \frac{x}{2} = \frac{\pi}{2}$;

3. $x^{x^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{2}$.

Exercice 39. Montrer

$$\forall x \in [0, +\infty[,\ \arctan(\sinh x) = \arccos\left(\frac{1}{\cosh(x)}\right).$$

Exercice 40. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. Montrer que les deux propriétés suivantes sont équivalentes :

(1) P est pair

(2) $\exists Q \in \mathbb{R}[X],\ \forall \theta \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[,\ P(\tan\theta) = Q\left(\frac{1}{\cos^2\theta}\right)$.

Exercice 41. Simplifier, pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ la fonction

$$f(x, y) = \arccos \frac{1 - xy}{\sqrt{1 + x^2}\sqrt{1 + y^2}}.$$

Exercice 42.

1. Montrer, pour tout $(a, b) \in [0, 1]^2$

$$\arctan a + \arctan b = \arctan \frac{a + b}{1 - ab}$$

2. En déduire la valeur de

$$S = 5 \arctan \frac{1}{8} + 2 \arctan \frac{1}{18} + 3 \arctan \frac{1}{57}.$$

Exercice 43. Montrer, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R} \times \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$:

$$y = \int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{\cosh t} \Leftrightarrow x = \int_0^y \frac{\mathrm{d}t}{\cos t}.$$