Université du Littoral — **Année universitaire 2011-2012**
Master 2 ème année — **Métiers de l'Enseignement en Mathématiques**

Préparation écrit analyse

Séance 3 : Comparaison locale des fonctions.

Exercice 1. Calculer les limites suivantes :

1. $\displaystyle\lim_{x\to 3}\left(\frac{1}{x^2-5x+6}-\frac{2}{x^2-4x+3}\right)$;

2. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{(x-2)(x+1)}-\sqrt{(x-1)(x-2)}\right)$;

3. $\displaystyle\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{2x^2+1}-\sqrt{x^2+x+3}}{x^2-3x+2}$;

4. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{\sinh(\cosh(x))}{\cosh(\sinh(x))}$.

Exercice 2. Former le développement limité, à l'ordre et au voisinage indiqué, de la fonction f définie par :

1. $f(x)=\ln(e^{2x}+2e^x+3)$ au voisinage de 0 et à l'ordre 2.

2. $f(x)=\sqrt{8+\sqrt{1+6x}}$ au voisinage de 0 et à l'ordre 2 .

3. $f(x)=\cosh(\ln(\cosh(x))$ au voisinage de 0 et à l'ordre 6.

4. $f(x)=\arctan\dfrac{1+x}{1+2x}$ au voisinage de 0 et à l'ordre 3.

5. $f(x)=\dfrac{1}{\sin^2 x}-\dfrac{1}{\sinh^2 x}$ au voisinage de 0 et à l'ordre 2.

Exercice 3. Montrer

1. $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{2n} k! \underset{n\to+\infty}{\sim} (2n)$;

2. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} 2^k \underset{n\to+\infty}{\sim} 2^{n+1}$;

3. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \sqrt{k} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{2}{3}n\sqrt{n}$.

Exercice 4. Calculer les limites suivantes :

1. $\displaystyle\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$;

2. $\displaystyle\lim_{x\to 0}(2^x+3^x-4^x)^{\frac{1}{x}}$;

3. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^4+3x^3}-2\sqrt{x^4+2x^3}+\sqrt{x^4+x^3}\right)$.

Exercice 5. On note $f :]0,2[\to \mathbb{R}$, la fonction définie par

$$f(x) = \frac{\ln(x)}{2-x}.$$

Calculer $f^{(k)}(1)$ pour $k \in \{0, ..., 4\}$.

Exercice 6. On note $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto f(x) = \ln(1+x^2) - x$.

1. Montrer que f est bijective.

2. Former le développement limité à l'ordre 4 en 0 de f^{-1}.

Exercice 7. On note, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n(x)\,\mathrm{d}x.$$

1. Calculer $I_n + I_{n+2}$ et en déduire $\lim_{n\to+\infty} I_n$.

2. Montrer, à l'aide d'une intégration par parties :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos 2x \tan^n x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2} - nI_n.$$

3. En déduire un équivalent simple de I_n lorsque n tend vers l'infini.

Exercice 8. On note, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$I_n = \int_0^1 \frac{x^{2n}}{1+x^n}\,\mathrm{d}x.$$

1. Trouver $\lim_{n\to+\infty} I_n$.

On considère, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$J_n = \int_0^1 \frac{x^{2n-1}}{1+x^n}\,\mathrm{d}x.$$

2. Montrer $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $|I_n - J_n| \leqslant \frac{1}{2n(n+1)}$.

3. Calculer J_n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

4. En déduire un équivalent simple de I_n lorsque n tend vers l'infini.