II. Polygônes, barycentres et convexité

1 Barycentre

En géométrie, le *barycentre* de plusieurs points affectés de poids est un point annulant une certaine égalité vectorielle. Les espaces qui vont nous intéressés sont le plan $\mathbb{R}^2$ et l'espace $\mathbb{R}^3$. Dans la suite $\mathcal{E}$ désigne indifférement $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$. On suppose aussi que $\mathcal{E}$ est muni d'un repère orthonormée.

Définition 1.1. Soient $P_1, P_2, ..., P_n$ des points de $\mathcal{E}$ et $\lambda_1, ..., \lambda_n$ des réels de somme non nulle. Le barycentre des points (P_i) affectés des poids (λ_i) est l'unique point G tel que

$$\sum_{i=0}^{n} \lambda_i \vec{GP_i} = \vec{0}.$$

On pose alors $G = \text{Bary}((P_i, \lambda_i)_{1 \leqslant i \leqslant n})$.

Proposition 1.2. *On peut*
- *changer l'order des points sans changer la valeur du barycentre tant que les points conservent leur poid.*
- *multiplier tous les poids par un même scalaire k non nul sans changer la valeur du barycentre.*

Proposition 1.3. *Soient $P_1, ..., P_n$ des points de $\mathcal{E}$ et $\lambda_1, ..., \lambda_n$ des réels de somme non nulle. On a équivalence entre*
- $G = \text{Bary}((P_i, \lambda_i)_{1 \leqslant i \leqslant n})$
- $\forall M \in \mathcal{E}, \quad \vec{MG} = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \vec{MP_i}}{\sum_{i=1}^{n} \lambda_i}$

Exercice 1.4. Soient A, B, C les points de coordonnées $(1, 2)$, $(3, 3)$ et $(3, 0)$. Calculer les coordonnées et dessiner

1. $\text{Bary}((A, 1), (B, 1))$.

2. $\text{Bary}((A, 2), (B, 1))$.

3. $\text{Bary}((A, 1), (B, 1), (C, 1))$.

4. $\text{Bary}((A, 1), (B, 2), (C, 3))$.

Définition 1.5. Soient A et B deux points du plan muni d'un repère orthonormée. Notons (x_A, y_A) et (x_B, y_B) les coordonnées respectives de A et B.
- $A + B$ désigne le point de coordonnées $(x_A + x_B, y_A + y_B)$;
- pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, λA désigne le point de coordonnées $(\lambda x_A, \lambda y_A)$.

De même si A et B sont deux points de l'espace de coordonnées respectives (x_A, y_A, z_A) et (x_B, y_B, z_B) alors $A + B$ est le point de coordonnées $(x_A + x_B, y_A + y_B, z_A + z_B)$ et λA celui de coordonnées $(\lambda x_A, \lambda y_A, \lambda z_A)$ quelque soit $\lambda \in \mathbb{R}$.

Exercice 1.6. Soient $P_1, ..., P_n$ des points du plan de coordonnées respectives (x_i, y_i) et $\lambda_1, ..., \lambda_n$ des réels de somme non nulle. Posons $G = \mathrm{Bary}((P_i, \lambda_i)_{1 \leqslant i \leqslant n})$ et notons (x_G, y_G) ses coordonnées.

1. Quelles sont les coordonnées du vecteur $\vec{OG}$?

2. Montrer que l'on a $x_G = \dfrac{\sum_{i=1}^n \lambda_i \vec{x_i}}{\sum_{i=1}^n \lambda_i}$ et $y_G = \dfrac{\sum_{i=1}^n \lambda_i \vec{y_i}}{\sum_{i=1}^n \lambda_i}$

3. En déduire que l'on a $G = \dfrac{\sum_{i=1}^n \lambda_i P_i}{\sum_{i=1}^n \lambda_i}$.

Exercice 1.7. Ecrire une fonction

```
Point barycenter(Point* Ps,float* coeffs,usint n)
```

qui étant donnée un tableau `Ps` de `n` `Point` et un tableau `coeffs` de `n` nombre flottant retourne le barycentre des points `Ps` affectés des coefficients correspondant.

Exercice 1.8. Ecrire une fonction

```
void foo(Point A,Point B)
```

qui dessine tous les barycentres $\mathrm{Bary}((A, \lambda), (B, 1 - \lambda))$ pour $\lambda = \dfrac{i}{10}$ avec $i = 0, ..., 10$. Que se passe-t-il si on remplace 10 par 100 puis 1000 ?

2 Ensembles convexes

Définition 2.1. Un sous-ensemble C de $\mathcal{E}$ est dit *convexe* lorsque, pour tout A et B de C, le segment $[A, B]$ est entièrement contenu dans C

Exercice 2.2. Parmis les objects suivant, lesquels sont convexes :
- un triangle,
- un triangle plein,
- un cercle,
- un disque,
- la zone située au dessus de la courbe $y = x^2$,
- la zone située en dessous de la courbe $y = x^2$,

Exercice 2.3. Soeint C et D deux sous-ensembles convexes de $\mathcal{E}$. Dire, pour chacun des sous-ensembles s'il est ou non convexe (en justifiant)

1. $E \setminus C$.

2. $C \cup D$.

3. $C \cap D$.

Proposition 2.4. *Un sous ensemble C de $\mathcal{E}$ est convexe si et seulement si pour tout famille finie $(P_1, ..., P_n)$ de poitns de C et tout choix $(\lambda_1, ..., \lambda_k)$ de coefficents positifs ou nuls, le braycentre $\mathrm{Bary}((P_i, \lambda_i)_{1 \leqslant i \leqslant n})$ est lui même dans C.*

Exercice 2.5. Ecrire une fonction

```
void filled_triangle(Point A,Point B,Point C)
```

qui dessine le triangle plein de sommets `A`,`B` et `C`.

Définition 2.6. Soit A une partie de $\mathcal{E}$. L'*enveloppe convexe* de A est la plus petite partie convexe de E qui contient A. On la note $\mathrm{conv}(A)$.

Exercice 2.7.

1. Quelle peut être l'enveloppe convexe de trois points A, B et C ?

2. Ecrire et tester la fonction

```
void convex_hull(Point A,Point B,Point C,Point D)
```

qui dessine l'envelopppe convex des de $\{\mathtt{A}, \mathtt{B}, \mathtt{C}, \mathtt{D}\}$.

3. Quel peut être l'enveloppe convexe de trois points A, B, C et D ?

Proposition 2.8. *Pour toute partie A de $\mathcal{E}$, $\mathrm{conv}(A)$ est l'ensemble des barycentres de points de A à coefficients positifs ou nuls.*

3 Polygone

En géométrie, un polygone est une figure plane, formé d'une suite cyclique de segments délimitant une portinon du plan.

Un polygône est constitué :
- d'une suite finie de points du plan appelés sommets ;
- de segments reliant les couples de sommets consécutifs ainsi qu'un segment reliant le premier et le dernier point. C'est segment sont appelés côtés.
- d'une partie du plan bornée appelé intérieur et dont la frontière est contenu dans la réunion des côtés.

Exercice 3.1. Proposer une structure `Polygon` permettant de représenter un polygone avec un nombre quelconque de sommets.

Exercice 3.2. Ecrire une fonction prenant en entrée un polygone et traçant le contours de ce polygone.

Définition 3.3. Un polygone est dit croisé si au moins deux de ses côtés sont sécants.

Soient A et B deux points du plan. Nous avons vus que l'équation cartésienne $F_{(AB)}$ de la droite (AB) sépare le plan P en trois : $\mathbb{R}^2 = P^-_{(AB)} \sqcup P^0_{(AB)} \sqcup P^+_{(AB)}$ où
- $P^0_{(AB)} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2,\ F_{(AB)} = 0\}$
- $P^+_{(AB)} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2,\ F_{(AB)} > 0\}$
- $P^+_{(AB)} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2,\ F_{(AB)} < 0\}$

On a évidement $P^0_{(AB)} = F_{(AB)}$.

Exercice 3.4. En se rappelant $F_{(AB)}(x, y) = (x_B - x_A)(y - y_A) - (y_B - y_1)(x - x_A)$ que pouvez-vous établir comme liens entre $P^0_{(AB)}$, $P^+_{(AB)}$, $P^-_{(AB)}$ d'une part et $P^0_{(BA)}$, $P^+_{(BA)}$, $P^-_{(BA)}$ d'autre part.

Exercice 3.5. Ecrire une fonction

```
bool is_crossing(Polygon P)
```

qui retourne `true` si le polygone P est croisé et `false` sinon.

Comment calculer l'enveloppe convexe d'un nuage de points.

A l'aide de l'algorithme du papier cadeau ! Le principe de cet algorithme est le suivant :

– le point le plus à gauche (et celui le plus haut en cas de choix multiple) que l'on note P_1 est le premier point de l'enveloppe convexe.

– on imagine qu'on accroche l'extrémité d'une ficelle (ou d'un rouleau de papier cadeau) à ce point en fait alors un tour englobant tous les points et on fixe l'autre extermine au point P en tendant la ficelle. Les points ≪ supportant la ficelle ≫ sont ceux de l'enveloppe convexe.

– concrètement si P_i est le dernier point de l'enveloppe convexe calculé alors P_{i+1} est un des points n'appartenant pas encore à l'enveloppe convexe tels que tous les points du nuage sont du même côté de la droite (P_i, P_{i+1}).

– si un tel point n'existe pas on a fini

Exercice 3.6. Ecrire une fonction

```
Polygon convex_hull(Polygon P)
```

qui retourne l'enveloppe convexe du polygone P.

4 Appartenance à un polygone

Tester si un point se trouve à l'intérieur d'un polygone convexe P n'est pas très difficile. A chaque arête A de ce polygone est associé une fonction $F(x, y)$ à deux variables. Un point du plan est sur A s'il annule F. Par contre s'il est à l'intérieur de P alors la valeur correspondante de F peut être > 0 ou < 0, cela dépend.

Exercice 4.1. Soit P un polygone dont les sommets sont $S_1 = (x_1, y_1), ..., S_n = (x_n, y_n)$ (on rappel que l'ordre des sommets est important). On suppose que P est convexe. Notons $A_1 = [S_1, S_2], ...A_{n-1} = [S_{n-1}, S_n], A_n = [S_n, S_1]$ les n arrêtes de P. Déterminer les équations cartésiennes $F_i(x, y)$ de A_i telles que $F_i(x, y) > 0$ si et seulement si le point de coordonnée (x, y) est à l'intérieur de P.

Exercice 4.2. Ecrire une fonction

```
bool is_in(Polygon P,Point A)
```

qui retourne `true` si A est à l'intérieur de P et `false` sinon.