Université du Littoral Côte d'Opale — Année universitaire 2010–2011
Licence 2ème année — Informatique

Courbes et Surfaces & Calcul formel

Documents et calculatrice autorisés.
2h le mercredi 22 juin 2011
Les réponses aux deux parties seront rédigées sur des copies différentes.

Toutes les réponses devront être justifiées.

I. Courbes et surfaces

Exercice 1. [6 points] Écrire la courbe polynomiale $\gamma\colon [0,1] \to \mathbb{R}^2$,

$$\gamma(t) = \left(4 - 5t - 20t^2 + 40t^3 - 40t^4 + 18t^5, 10t - 10t^2 - 50t^3 + 90t^4 - 38t^5\right),$$

comme courbe de Bézier (c'est-à-dire, identifier les points de contrôle $p = (p_0, \ldots, p_5)$) et dessiner sa trace. Dessiner aussi les étapes de l'algorithme de De Casteljau afin de déterminer $\gamma_B^p(1/3)$.

Exercice 2. [6 points] Soit $p_0 = (-6, 0)$, $p_1 = (-3, 3)$, $p_2 = (0, 9)$ et $p_3 = (6, 3)$. Soit $\gamma_B^p\colon [0,1] \to \mathbb{R}^2$ la courbe de Bézier associée.

(a) Dessiner γ_B^p.

(b) On veut prolonger γ_B^p par une courbe de Bézier γ_B^q qui finit en $q_3 = (0, -4)$ telle que la courbe composée de γ_B^p et γ_B^q soit de classe $\mathcal{C}^2$. Déterminer les points de contrôle q_0, q_1 et q_2. Dessiner γ_B^q dans le même plan cartesien que γ_B^p.

Exercice 3. [8 points] On se pose de calculer la spline cubique naturelle $(q, p)\colon [0,2] \to \mathbb{R}^2$ qui passe par les points $(x_0, y_0) = (0, 1)$, $(x_1, y_1) = (1, 3)$ et $(x_2, y_2) = (4, 2)$. *Dans cet exercice on va se restreindre au calcul de* $q\colon [0,2] \to \mathbb{R}$. On pose $q_j\colon [0,2] \to \mathbb{R}$, $q_j(t) = a_j + b_j t + c_j t^2 + d_j t^3$ pour $j = 0, 1$.

1. Donner le système linéaire qui détermine les réels D_0, D_1, D_2. Résoudre ce système.
2. En déduire les coefficients a_j, b_j, c_j, d_j pour $j = 0, 1$.

II. Calcul Formel

Exercice 4. [6 points] On pose $p = 3$ et $q = 5$ et $e = 3$

(a) Calculer $n = p \cdot q$ puis $\phi(n)$.

(b) Chercher d tel qu'on ait $ed \equiv 1 \mod \phi(n)$.

(c) Quels paramètres constituent la clé publique ? Et la clé privée ?

(d) Posons $M = 6$. Quel est le chiffré C de M.

(e) Retrouver M à partir de C et de la clé privée.

Exercice 5. [8 points] On se propose de représenter un nombre complexe par:

```
struct{
  float im;
  float re;
}Complexe;
```

(a) Ecrire les fonctions `Complexe addition(Complexe a,Complexe b)` et `Complexe multiplication(Complexe a,Complexe b)` qui retournent respectivement $a+b$ et $a \times b$.

(b) Ecrire une fonction `int racines(float a,float b,float c,Complexe* roots)` qui retourne le nombre de racines du polynômes $ax^2 + bx + c$ et les écrits dans le tableau `roots`.

(c) On rappel que le module de $x + iy$ et $\sqrt{x^2 + y^2}$ et qu'un nombre complexe est une racine de l'unité si son module vaut 1. Ecrire une fonction `int estRacineUnite(Complexe a)` qui retourne 1 si a est une racine de l'unité et 0 sinon.

(d) Supposant que les fonctions cos et sin existe en `C` écrire un fonction `void polygone(unsigned short int n,Complexe* tab)` qui initialise un tableau `tab` de n `Complexe` avec les n sommets du polygône régulier à n cotés.

Exercice 6. [6 points] Soit ϕ le code correcteur de type $(3, 4)$ défini par :

$$\phi \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \\ b_0 + b_1 + b_2 \end{bmatrix}$$

(a) Le code ϕ est-il linéaire ? Systématique ?

(b) Quelle est la matrice génératice de ϕ ?

(c) Quelle est la matrice de contrôle de ϕ ?

(d) Combien d'erreurs ϕ peut-il détecter ? Et corriger ?