L1 - Mathématiques pour la biologie - S1

Feuille d'exercices 8 - Équations différentielles linéaires (2)

Exercice 1. Résoudre les équations suivantes :

(a) $y'' + 6y' + 9y = 0$;

(b) $y'' - 2y' + 5y = 0$, on déterminera de plus la solution satisfaisant à $y(\pi/2) = 0$ et $y'(\pi/2) = 1$;

(c) $2y'' - 8y' + 6y = 0$;

(d) $-y'' + 5y' - 6y = 0$, on déterminera de plus la solution satisfaisant à $y(0) = 1$ et $y'(0) = 0$;

(e) $4y'' - 16y' + 16y = 0$;

(f) $2y'' + 10y' + 20 = 0$.

Exercice 2. Résoudre les équations suivantes :

(a) $2y'' + 2y' + y = te^{-t}$; on cherchera une solution particulière sous la forme $y(t) = (at + b)e^{-t}$.

(b) $y'' - 4y = 4e^{-2t}$; on cherchera une solution particulière sous la forme $y(t) = (at + b)e^{-2t}$. Déterminer la solution satisfaisant à $y(0) = y'(0) = 1$.

(c) $y'' + y = \frac{3}{4}\cos(t)$; on cherchera une solution particulière sous la forme

$$y(t) = t\big(a\cos(t) + b\sin(t)\big).$$

Déterminer la solution satisfaisant à $y(0) = y'(0) = 4$.

(d) $y'' - 4y' + 4y = (t^2 + 1)e^t$; on cherchera une solution particulière sous la forme

$$y(t) = (at^2 + bt + c)e^t.$$

Exercice 3. Considérons l'équation $ay'' + by' + cy = 0$ et supposons que $b^2 - 4ac = 0$. Soit r l'unique solution réelle de $ax^2 + bx + c = 0$. On veut montrer que $f(t) = (\lambda t + \mu)e^{rt}$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ est la solution générale de $ay'' + by' + cy = 0$.

(a) Montrer que $2ar + b = 0$ sans calculer.

(b) Montrer que f est une solution de $ay'' + by' + cy = 0$: pour cela, on pourra prouver les égalités $f'(t) = rf(t) + \lambda e^{rt}$ puis $f''(t) = r^2 f(t) + 2r\lambda e^{rt}$, et enfin conclure en utilisant (a).

(c) Déterminer toutes les fonction $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ qui vérifient $g''(t) = 0$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.

(d) Soit $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une solution de $ay'' + by' + cy = 0$. On pose $h(t) = g(t)e^{-rt}$. Calculer $h''(t)$.

(e) Combiner (c) et (d) pour conclure.