Fonctions équivalentes

1 Définition

On dit que deux fonctions f et g sont équivalentes en $a \in \mathbb{R}$ (avec éventuellement $a = +\infty$ ou $a = -\infty$) si :
- elles sont définies sur un intervalle contenant a ;
- il existe un intervalle contenant a sur lequel elles ne sont pas nulles ;
- $\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$.

Dans ce cas on note $f(x) \sim_{x \to a} g(x)$ ou bien $f \sim_a g$.

2 Exemple

- Si $\lim_{x \to a} f(x) = \ell$ avec $\ell \in \mathbb{R}$, alors $f \sim_a \ell$.
- Si f est dérivable en 0 et $f'(0) \neq 0$, alors

$$f(x) - f(0) \sim_{x \to 0} x f'(0).$$

  On a par exemple :
  - $e^x - 1 \sim_{x \to 0} x$;
  - $\ln(1 + x) \sim_{x \to 0} x$;
  - $\sin(x) \sim_{x \to 0} x$;
  - $\sqrt{1 + x} \sim_{x \to 0} \frac{1}{2} x$.
- On a aussi $1 - \cos(x) \sim_{x \to 0} \frac{x^2}{2}$.

3 Opérations sur les équivalents

Si $f(x) \sim_{x \to a} \alpha(x)$ et $g(x) \sim_{x \to a} \beta(x)$ alors

$$f(x)g(x) \sim_{x \to a} \alpha(x)\beta(x) \qquad \text{et} \qquad \frac{f(x)}{g(x)} \sim_{x \to a} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)}.$$

Dit autrement, on peut multiplier et diviser entre eux les équivalents.
En revanche, il n'est pas possible en général de les additionner : si $f(x) = x + x^2$ et $g(x) = -x^2$, alors $f(x) \sim_{x \to +\infty} x^2$ et $g(x) \sim_{x \to +\infty} = -x^2$, mais on n'a pas $f(x) + g(x) \sim_{x \to +\infty} 0$.