

Feuille d'exercices 4 - Intégration (1)

Quand vous avez trouvé une primitive F d'une fonction f , vérifiez toujours votre réponse en dérivant F !

Exercice 1. Trouver des primitives de

- (a) $f(x) = 3x^3 - 4x^2 + 2x + 7$;
- (b) $f(x) = (x - 2)^3$;
- (c) $f(x) = (2x - 2)^3$;
- (d) $f(x) = e^{3x}$;
- (e) $f(x) = \frac{1}{2x}$;
- (f) $f(x) = \frac{32}{5x^2}$;
- (g) $f(x) = 2 \cos(4x + 1)$;
- (h) $f(x) = \sin(x) \cos(x)$;
- (i) $f(x) = \frac{3x^2 - 5}{(-x^3 + 5x)^2}$ (indication : vérifiez que f est de la forme $f(x) = \frac{-u'(x)}{u(x)^2}$) ;
- (j) $f(x) = \frac{-2x + 4}{-x^2 + 4x}$ (vérifier que $f(x) = \frac{u'(x)}{u(x)}$) ;
- (k) $f(x) = \frac{1}{1 + (x-5)^2}$ (vérifier $f(x) = \frac{u'(x)}{1 + u(x)^2}$) ;
- (l) $f(x) = \frac{-2x + 5}{x^4 - 10x^3 + 25x^2}$.

Exercice 2. Intégrer par parties :

- (a) $\int_0^1 x e^x dx$;
- (b) $\int_{-12}^{12} x^2 e^x dx$;
- (c) $\int_0^3 2x^2 e^{x/3} dx$;
- (d) $\int_0^y (x^2 - x) \ln(x) dx$;
- (e) $\int_0^y 2x^2 \cos(x) dx$.

Exercice 3. Déterminer une primitive de $f(x) = \ln(x)$. On pourra écrire $f(x) = 1 \cdot \ln(x) = u'(x)v(x)$ puis utiliser l'intégration par parties. Employer la même méthode pour trouver une primitive de $g(x) = \arctan(x)$.

Exercice 4. Employer la méthode suivante pour calculer une primitive de $f(x) = \cos(x) \sin(x)$: intégrer par parties et remarquer que l'on retrouve l'intégrale de départ avec un facteur différent de 1.

Exercice 5. Trouver une primitive de $f(x) = \cos^2(x)$.

Première méthode :

- (a) Intégrer par parties la fonction $f(x) = \cos^2(x) = \cos(x) \cos(x) = u'(x)v(x)$;
- (b) puis utiliser l'identité $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$ pour conclure.

Deuxième méthode :

- (a) Exprimer $\cos^2(x)$ en fonction de $\cos(2x)$;
- (b) conclure.

Exercice 6. Étudier la fonction $F:]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$, $F(x) = \int_0^x \frac{dt}{t^2}$ et en particulier déterminer $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x)$. Interprétation géométrique ?

Exercice 7. En s'inspirant de la première méthode de l'exercice 5, trouver une primitive de $f(x) = \cos^3(x)$.