Bases pour l'étude de fonctions

1 Trinôme du second degré

Pour résoudre une équation du type $ax^2 + bx + c = 0$ avec $a \neq 0$, on peut calculer le discriminant

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

Il y a alors trois cas à distinguer :
– si $\Delta > 0$, l'équation admet 2 solutions réelles distinctes :

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}, \qquad x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a};$$

– si $\Delta = 0$, l'équation admet une unique solution

$$x_0 = -\frac{b}{2a};$$

– Si $\Delta < 0$, l'équation n'a pas de solutions réelles.
La courbe représentative de $x \mapsto ax^2 + bx + c$ est une parabole, pointée vers le bas si $a > 0$ et vers le haut si $a < 0$. En faisant un dessin (ou en se rappelant du résultat), on peut retrouver le signe de l'expression $ax^2 + bx + c$ en fonction de x.

2 Limites

On calcule les limites d'une fonction aux bornes de son ensemble de définition. Donc éventuellement
– en $+\infty$ et $-\infty$;
– au voisinage d'une valeur interdite (isolée) ;
Pour calculer une limite, on utilise les règles usuelles sur les limites en n'oubliant pas les formes indéterminées
– $\infty \times \infty$
– $\frac{\infty}{\infty}$
– $0 \times \infty$.

3 Dérivation

Soit $f : I \to \mathbb{R}$. La fonction f est dite dérivable en a si la limite

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

existe. On la note alors $f'(a)$. Graphiquement, $f'(a)$ est le coefficient directeur de la tangente au point d'abscisse a de la courbe représentative de f (faire un dessin). L'équation de cette tangente est alors

$$y = f'(a)(x - a) + f(a).$$

Dérivées usuelles

$f(x)$	$f'(x)$
a	0
x	1
x^2	$2x$
x^n	nx^{n-1}
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$
$\frac{1}{x^n}$	$-\frac{n}{x^{n+1}}$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$

Règles de calcul

$$\begin{aligned}(f+g)' &= f'+g' \\ (\lambda f)' &= \lambda f' \\ (fg)' &= f'g+g'f \\ \left(\frac{f}{g}\right)' &= \frac{f'g-g'f}{g^2} \\ (f^n)' &= nf'f^{n-1}(\text{valable dès que } n \neq -1).\end{aligned}$$

4 Fonctions composées

Définition *On considère deux fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$. La fonction composée gof est définie par*

$$x \mapsto f(x) \mapsto g(f(x)) = (gof)(x).$$

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $(gof)(x) = g(f(x))$.

Formule de dérivation : si $h(x) = gof(x)$ alors

$$h'(x) = f'(x).g'(f(x)).$$

Exemple : $h(x) = \sqrt{x^2+1}$.

5 Fonctions réciproques

Théorème *Une fonction dérivable et strictement monotone sur un intervalle I réalise une bijection définie par*

$$\begin{array}{cccc} f: & I & \to & f(I) \\ & x & \mapsto & y = f(x) \end{array}$$

Elle admet alors une application ***réciproque*** *notée f^{-1} définie par*

$$\begin{array}{cccc} f^{-1}: & f(I) & \to & I \\ & y & \mapsto & x = f^{-1}(y) \end{array}$$

Propriété *Pour tout $x \in I$, $f^{-1}of(x) = x$.*
Pour tout $x \in f(I)$, $fof^{-1}(x) = x$.

Exemples : La fonction racine carrée. La fonction réciproque de l'inverse.

Formule de dérivation pour l'application réciproque

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}$$