ULCO **2018 - 2019**
L1 Informatique **Calcul Formel**

TP 6 : Un peu de trigonométrie

1 Fonctions trigonométriques

Les fonctions trigonométriques élémentaires sont avec `Maxima` définies par les fonctions suivantes : `cos, sin, tan, cot`. La fonction cotangente est l'inverse de la tangente, c'est à dire obtenue par division de cosinus par sinus.
Leurs fonctions réciproques respectives sont `acos, asin, atan, acot`. Les fonctions trigonométriques hyperboliques sont avec `Maxima`, les fonctions suivantes : `cosh, sinh, tanh, coth`. Leur fonctions réciproques respectives sont `acosh, asinh, atanh, acoth`.

Exercice 1. Compléter les tableaux suivants soit avec `Maxima`, soit de mémoire et dans ce cas, vérifier quand même quelques valeurs avec le logiciel. Rappelons qu'avec `Maxima`, le nombre π s'obtient avec la constante `%pi`.

[Apprendre par coeur ces tableaux]

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\cos x$					
$\sin x$					
$\tan x$					

u	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\arccos u$					
$\arcsin u$					

2 Formules

[Les apprendre par coeur]

Exercice 2. A l'aide de la commande `trigexpand` retrouver avec `Maxima` les formules de développement suivantes :

$$\cos(a+b) =$$
$$\sin(a+b) =$$
$$\tan(a+b) =$$

A l'aide de la commande `trigexpand` retrouver avec `Maxima` les formules usuelles suivantes. A côté du résultat, faire le dessin du cercle trigonométrique avec les angles et les valeurs correspondantes.

$$\cos(\pi - x) =$$
$$\sin(\pi - x) =$$

$$\cos(\pi + x) =$$
$$\sin(\pi + x) =$$

$$\cos(\pi/2 + x) =$$
$$\sin(\pi/2 + x) =$$

Utiliser ces formules pour trouver (de tête ou sur brouillon puis en vérifiant avec `Maxima` si vous avez un doute), les valeurs demandées sur le tableau suivant :

x	0	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{-3\pi}{4}$	$\frac{-\pi}{3}$	$\frac{9\pi}{2}$
$\cos x$					
$\sin x$					

3 Simplifications

`Maxima` possède de nombreuses commandes liées à la transformation d'expressions trigonométriques.

1. Vous avez utilisé ci-dessus la commande `trigexpand`.

2. La commande `trigsimp` essaie de simplifier les expressions en utilisant les égalités $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$ ou $\mathrm{ch}^2 x - \mathrm{sh}^2 x = 1$.

   Par exemple, la première ligne des commandes suivantes vous donne $\cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x$. La seconde ligne fait disparaître la fonction sinus en appliquant $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$:

   ```
   trigexpand(cos(2*x));
   trigsimp(%);
   ```

3. La commande `trigrat` essaie de simplifier l'expression en la "quasi-linéarisant". Ce barbarisme signifie ici qu'il recherche des sommes de fonctions trigonométriques composées avec des fonctions linéaires, comme par exemple $\cos(3x)$, $\sin(7x)$,... Attention, ces fonctions ne sont pas linéaires, quand bien même on vous dira : "linéariser $\cos^3 x$"...

   Essayer la commande `trigrat(sin(3*u)/sin(u+%pi/3))`

Exercice 3. On peut obtenir une preuve des formules de développement de $\cos(a+b)$ et $\sin(a+b)$ à partir de la formule d'Euler :

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x.$$

Cette égalité n'est pas qu'un simple moyen de noté les nombres complexes de module 1 sous la forme trigonométrique, mais bien une des plus jolies formules des mathématiques.

En $x = a + b$ on obtient

$$e^{i(a+b)} = \cos(a+b) + i \sin(a+b).$$

Or, $e^{i(a+b)} = e^{ia+ib} = e^{ia}e^{ib}$. Faire le produit de $e^{ia} = \cos a + i \sin a$ par $e^{ib} = \cos b + i \sin b$ et obtenez les deux formules de developpement de $\cos(a+b)$ et $\sin(a+b)$.

Exercice 4.
1. Linéariser avec `Maxima` l'expression trigonométrique $\sin^5 x$. Vérifier que vous savez retrouver ce résultat sans logiciel.
2. Linéariser $\sin^2 x \cos^3 x$.

4 Fonctions trigonométriques inverses

Exercice 5.
1. La fonction cosinus est une bijection quand on la restreint à l'intervalle $[0, \pi]$ et ceci en prenant ses valeurs dans $[-1, 1]$. Sa fonction réciproque est appelée arc cosinus et elle est notée Arccos. `Maxima` note cette fonction `acos`. Tracer sur un même graphique avec `Maxima` les graphes de cos : $[0, \pi] \to [-1, 1]$, de arccos : $[-1, 1] \to [0, \pi]$ et la première bissectrice. Utiliser `Maxima` pour retrouver la formule de la dérivée de l'arc cosinus, puis démontrez-la.

2. Copier-coller ce que vous aurez fait ci-dessus et traiter le cas de la bijection sin : $[-\pi/2, \pi/2] \to [-1, 1]$.

3. Idem pour la bijection tan : $]-\pi/2, \pi/2[\to [-1, 1]$. Par pitié, ne vous mettez pas en tête que la fonction tangente est bijective! Il s'agit ici de la restriction de tangente à l'intervalle $]-\pi/2, \pi/2[$ et c'est cette restriction qui est bijective. Utiliser `Maxima` pour retrouver la formule de la dérivée de l'arc tangente, puis démontrez-la.

Exercice 6. On veut ici prouver que

$$\cos(\frac{\pi}{5}) = \frac{\sqrt{5}+1}{4}.$$

1. On pose $z = e^{i\frac{\pi}{5}}$. Vérifier que $z^5 + 1 = 0$.
2. On pose $w = z + 1/z$. Vérifier que $w = 2 * \cos(\pi/5)$.
3. Développer avec `Maxima` les expressions en z de w^5 et w^3. Puis, trouver une équation de degré 5 vérifiée par w.
4. La résoudre avec `Maxima`, revenir vers z et retrouver la valeur de $\cos(\pi/5)$ donnée ci-dessus.