ULCO **2018 - 2019**
L1 Informatique **Calcul Formel**

TP 3 – Sujets de Bac S

Exercice 1 (Extrait de l'exercice 1 du bac 2017)**.**

Partie A

On considère la fonction h définie sur l'intervalle $[0, +\infty[$ par : $h(x) = xe^{-x}$.

1. Déterminer la limite de la fonction h en $+\infty$.

2. Étudier les variations de la fonction h sur l'intervalle $[0, +\infty[$ et dresser le tableau de variations.

3. L'objectif de cette question est de déterminer une primitive de la fonction h.

a. Vérifier que pour tout nombre réel x appartenant à l'intervalle $[0, +\infty[$, on a :

$$h(x) = e^{-x} - h'(x);$$

où h' désigne le fonction dérivée de h.

b. Déterminer une primitive sur l'intervalle $[0, +\infty[$ de la fonction $x \mapsto e^{-x}$.

c. Déduire des deux questions précédentes une primitive de la fonction h sur l'intervalle $[0, +\infty[$.

Partie B

On définit les fonctions f et g sur l'intervalle $[0, +\infty[$ par :

$$f(x) = xe^{-x} + \ln(x + 1) \quad \text{et} \quad g(x) = \ln(x + 1).$$

On note $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ les représentions graphiques respectives des fonctions f et g dans un repère othonormé.

1. Tracer ces deux courbes $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ sur un même graphique pour $x \in [0, 6]$.

2. Pour un nombre réel x appartenant à l'intervalle $[0, +\infty[$, on appelle M le point de coordonnées $(x, f(x))$ et N le point de coordonnées $(x, g(x))$.

a. Déterminer la valeur de x pour laquelle la distance MN est maximale et donner cette distance maximale.

b. Placer sur le graphique les points M et N correspondant à la valeur maximale de MN.

3. Soit λ un réel appartenant à l'intervalle $[0, +\infty[$. On note D_λ le domaine du plan délimité par les courbes $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ et par les droites d'équations $x = 0$ et $x = \lambda$.

a. On note A_λ l'aire du domaine D_λ, exprimée en unitée d'aire. Démontrer que

$$A_\lambda = 1 - \frac{\lambda + 1}{e^\lambda}.$$

b. Calculer la limite de A_λ lorsque λ tend vers $+\infty$ et interpréter le résultat.

Exercice 2 (Extrait du problème du bac S de 2000)**.** Dans tout le problème, le plan est rapporté à un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

Partie A

On considère la fonction f_1 définie sur $[0, +\infty[$ par

$$f_1(x) = xe^{-x^2}$$

et on appelle $(\mathcal{C}_1)$ sa courbe représentative.

1. Montrer que, pour tout réel positif x, $f'(x) = e^{-x^2} - 2x^2e^{-x^2}$. En déduire le sens de variation de f_1.

2. Calculer la limite de f_1 en $+\infty$ (on pourra poser $u = x^2$). Interpréter graphiquement ce résultat.

3. Dresser le tableau de variation de f_1.

4. On appelle (Δ) la droite d'équation $y = x$. Déterminer la position de $(\mathcal{C}_1)$ par rapport à (Δ).

5. Tracer $(\mathcal{C}_1)$ et (Δ) sur le même graphique.

Partie B

On considère la fonction f_3 définie sur $[0, +\infty[$ par $f_3(x) = x^3e^{-x^2}$ et on appelle $(\mathcal{C}_3)$ sa courbe représentative.

1. Monter que, pour tout réel x positif, $f_3'(x)$ a même signe que $3 - 2x^2$. En déduire le sens de variation de f_3.

2. Déterminer les positions relatives de $(\mathcal{C}_1)$ et $(\mathcal{C}_3)$.

3. Tracer $(\mathcal{C}_3)$ dans le même repère que $(\mathcal{C}_1)$ (on admettra que $(\mathcal{C}_3)$ a la même asymptote que $(\mathcal{C}_1)$ en $+\infty$.)

4. On appelle (D) la droite d'équation $x = 1$. Soit $\mathcal{A}_1$ l'aire en unités d'aire du domaine limité par la courbe $(\mathcal{C}_1)$, les deux axes de coordonnées et la droite (D) et soit $\mathcal{A}_3$ l'aire en unités d'aire du domaine limité par la courbe $(\mathcal{C}_3)$ et les deux axes de coordonnées et la droite (D).

a. Calculer $\mathcal{A}_1$.

b. A l'aide d'une intégration par parties, montrer que $\mathcal{A}_3 = -\dfrac{1}{2e} + \mathcal{A}_1$.

Partie C

On désigne par n un entier naturel non nul et on considère la fonction f définie sur $[0, +\infty[$ par

$$f_n(x) = x^n e^{-x^2}.$$

On note $(\mathcal{C}_n)$ la courbe représentative de f dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1. Montrer que, pour tout $n \geq 1$, f_n admet un maximum pour $x = \sqrt{\dfrac{n}{2}}$. On note α_n ce maximum.

2. On appelle S_n le point $(\mathcal{C}_n)$ d'abscisse $\sqrt{\dfrac{n}{2}}$. Montrer que, pour tout n, $(\mathcal{C}_n)$ passe par S_2. Placer S_1, S_2 et S_3 sur la figure.

3. Soit la fonction g définie sur $[0, +\infty[$ par :

$$g(x) = e^{\frac{x}{2}(-1+\ln(\frac{x}{2}))}$$

a. Étudier le sens de variation de g.

b. Montrer que, pour tout entier $n \geq 1$, $\alpha_n = g(n)$. En déduire que tout point S_n a une ordonnée supérieure à celle de S_2.