MATH4 L1. Maths LPI. Cours 2016-2017. Semestre 2
UNIVERSITE DU LITTORAL ULCO
Mabel Cuesta et Jean Fromentin, LMPA

Examen du 29 mai 2017

Documents et calculatrices non autorisés. Durée 3h.

Exercice 1. Questions de Cours (6 pts)

(a) Enoncer le Théorème de Rolle et citer un résultat du cours utilisant ce théorème dans sa démonstration.

(b) Enoncer le Théorème de Bolzano-Weierstrass et citer un résultat du cours utilisant ce théorème dans sa démonstration.

(c) Rappeler la définition de base et de dimension d'un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.

Exercice 2. (8 pts)
Calculer les limites suivantes :

1. $\lim\limits_{x\to+\infty} xE\left(\dfrac{1}{x}\right)$ où $E(x)$ est la partie entière de x.
2. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x}{2+\sin(\frac{1}{x})}$
3. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\tan(x^2)}{x\sin(x)(1-\cos(x))}$
4. $\lim\limits_{x\to+\infty} (x+1)e^{2/(x+1)} - xe^{2/x}$.

Exercice 3. (4 pts) En utilisant la définition de limite, montrer que

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{2n+1}{3n-2} = \frac{2}{3}.$$

Exercice 4. (6 pts) Dans $\mathbb{R}^4$ on considère les sous-espaces vectoriels

$$E_1 = \mathrm{Vect}\,\{(2,1,1,1),(2,2,1,0)\}, \quad E_2 = \mathrm{Vect}\,\{(1,2,-1,0),(2,1,2,1),(2,-2,0,1)\}$$

1. Déterminer la dimension et une base de E_1 puis de E_2.
2. Déterminer la dimension et une base de $E_1 + E_2$.
3. Les sous-espaces E_1 et E_2 sont ils supplémentaires ? Justifiez vos réponses.

Exercice 5. (6 pts)

1. Montrer que pour pour tout $x > 0$ on a
$$\frac{1}{x+1} \leq \ln(x+1) - \ln x \leq \frac{1}{x}.$$
2. On pose $H_n := 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}$. En déduire que
$$\ln(n+1) \leq H_n \leq 1 + \ln(n)$$
pour tout $n \in \mathbb{N}_*$.
3. Déterminer la limite de H_n.

Exercice 6. (5 pts) Soit $x_0 \in \mathbb{R}$, $h \in]0, +\infty[$ et $g :]x_0 - h, x_0 + h[\to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1. Supposons que la dérivée seconde de g par la droite en x_0, définie par

$$g_+^{''}(x_0) := \lim_{x \to x_0^+} \frac{g'(x) - g'(x_0)}{x - x_0},$$

existe dans $\mathbb{R}$. Montrer qu'il existe $h' > 0$ tel que pour tout $x \in [x_0, x_0 + h']$ on a le résultat suivant :

(i) $g_+^{''}(x_0) > 0 \Rightarrow g(x) \geq g(x_0) + g'(x_0)(x - x_0)$,

(ii) $g_+^{''}(x_0) < 0 \Rightarrow g(x) \leq g(x_0) + g'(x_0)(x - x_0)$.

Exercice 7. (10 pts) Considérons la fonction

$$f(x) = \begin{cases} ax^2 + bx + 1 & \text{si } x \leq 0, \\ e^x + \sin x + c & \text{si } x > 0. \end{cases}$$

1. Pour quelles valeurs de $a, b, c \in \mathbb{R}$ la fonction f est-elle de classe $C^1(\mathbb{R})$?
2. Pour quelles valeurs de $a, b, c \in \mathbb{R}$ la fonction f est-elle de classe $C^2(\mathbb{R})$?
3. Pour les valeurs de $a, b, c \in \mathbb{R}$ trouvées dans la question 1, déterminer la droite tangente en $x_0 = 0$ à la courbe d'équation $y = f(x)$.
4. Pour les valeurs de $a, b, c \in \mathbb{R}$ trouvées dans la question 2, préciser pour x voisin de $x_0 = 0$ la position de la courbe $y = f(x)$ par rapport à cette tangente.
5. Pour les valeurs de $b, c \in \mathbb{R}$ trouvées dans la question 1 et $a = -1$, préciser pour x voisin de $x_0 = 0$ la position de la courbe $y = f(x)$ par rapport à la tangente en $x_0 = 0$.

On pourra utiliser les résultats de la l'exercice 6.

La note sera comptée sur 40 points