Devoir Surveillé – Mathématiques 4

Lundi 26 mars 2017
Durée : 2h
Documents et calculatrices non autorisés

Exercice 1. Questions de cours

1. Soit E un $\mathbb{R}$ espace vectoriel. Rappeler la définition de famille libre de vecteurs de E.
2. Rappeler la définition de la convergence d'une suite de réels $(u_n)_n$ vers une limite $\ell \in \mathbb{R}$.

Exercice 2. Parmi les sous-ensembles suivants de $\mathbb{R}^4$, préciser lesquels sont des sous-espaces vectoriels :

1. $E = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \,|\, 3x - y + t = 0\}$;
2. $F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \,|\, x - y + 2z + t = 1\}$;
3. $G = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \,|\, |x + t| = |y|\}$.

Exercice 3. On considère, dans $\mathbb{R}^4$, les vecteurs :

$$v_1 = (1, 2, 3, 4), v_2 = (1, 1, 1, 3), v_3 = (2, 1, 1, 1), v_4 = (-1, 0, -1, 2), v_5 = (2, 3, 0, 1)$$

Soit F l'espace vectoriel engendré par (v_1, v_2, v_3) et G celui engendré par (v_4, v_5).

1. Montrer que les familles (v_1, v_2, v_3) et (v_4, v_5) sont libres.
2. En déduire la dimension de F et celle de G.
3. Le vecteur $w = (1, 4, 6, 10)$ appartient-il à F ? et à G ?
4. Donner une base de $F + G$.
5. Calculer les dimensions de $F \cap G$ et $F + G$.

Exercice 4. Calculer la limite de la suite $(u_n)_n$ lorsque u_n est égal à

1. $\dfrac{3^n}{4^n}$;
2. $\dfrac{n^3 + 2n}{3^n}$;
3. $\cos\left(\dfrac{2^n}{n!}\right)$;
4. $\ln\left(\dfrac{n^2 + 2n + 1}{n^2}\right)$;
5. $\left(1 + \dfrac{1}{n^2}\right)^{n^2}$;

Exercice 5. Soit $(u_n)_n$ une suite convergente vers $a \in \mathbb{R}$ et $(v_n)_n$ une suite convergente vers $b \in \mathbb{R}$.

1. Montrer, en utilisant la définition de limite, que la suite $(v_n)_n$ est bornée par un réel $M \in \mathbb{N}$.
2. Démontrer, en utilisant la définition de limite, que la suite $(u_n \times v_n)$ converge vers $a \times b$.
   Indication : on pourra utiliser après justifcations : $u_n \times v_n - a \times b = (u_n - a) \times v_n + a \times (v_n - b)$.