EILCO **2015-2016**
CP1 **MAT11**

Outils mathématiques pour l'ingénieur – Session 2

Durée : 2h

Calculatrice autorisée
Documents interdits

Exercice 1 (2 points)**.** Mettre sous la forme $a + \mathbf{i}b$ (a, $b \in \mathbb{R}$) les nombres :

$$\textbf{a. } \frac{4+\mathbf{i}}{2-3\mathbf{i}}, \qquad \textbf{b. } \frac{3+2\mathbf{i}}{5-\mathbf{i}} + \frac{1+\mathbf{i}}{\mathbf{i}}.$$

Exercice 2 (4 points)**.** Calculer les intégrales suivantes :

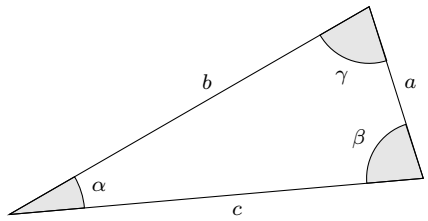
1. $\displaystyle\int_0^{\pi/2} x\,\cos(2x)\,dx.$

2. $\displaystyle\int_0^2 \frac{x^2}{\sqrt{x^3+1}}\,dx$ (on pourra faire le changement de variables $\varphi(x) = x^3 + 1$).

3. $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x^2+1}\,dx.$

4. $\displaystyle\int_3^4 \frac{1}{x^2-1}\,dx$ (on pourra chercher des réels a et b vérifiant $\frac{a}{x-1} + \frac{b}{x+1} = \frac{1}{x^2-1}$).

Exercice 3 (2 points)**.** On considère le triangle



En sachant qu'on $a = 6$cm, $b = 4$cm et $c = 5$cm, déterminer à $0.01°$ près la mesure des angles α, β et γ (on pourra supposer que les angles sont aigus). Attention, la figure n'est pas contractuelle.

Exercice 4 (3 points)**.** Soit l'équation différentielle $(E)\ :\ y'(t) + 2\,y(t) = t\,e^{-2\,t}$.

1. Donner l'équation homogène (E_H) associée.

2. Calculer la solution générale de l'équation homogène (E_H)

3. A l'aide le la méthode de la variation de la constante, déterminer une solution particulière de l'équation différentielle (E).

4. En déduire la solution générale de l'équation différentielle (E).

5. Déterminer la solution de (E) vérifiant $y(2) = 0$.

Exercice 5 (6 points)**.** On rappel que les fonctions ch et sh sont définies sur $\mathbb{R}$ par

$$\mathrm{ch}(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \quad \text{et} \quad \mathrm{sh}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}.$$

1. Calculer les dérivées des fonctions ch et sh.

On définit la fonction th par $\mathrm{th}(x) = \dfrac{\mathrm{sh}(x)}{\mathrm{ch}(x)}$.

2. Quel est le domaine de définition de la fonction th.

3. La fonction th est elle paire, impaire ? (justifier)

4. Démontrer que pout tout $x \in \mathbb{R}$, on a $(\mathrm{ch}(x))^2 - (\mathrm{sh}(x))^2 = 1$.

5. Montrer que la dérivée de la fonction th est

$$\mathrm{th}'(x) = \frac{1}{\mathrm{ch}^2(x)}.$$

Un calcul de limite donne $\lim\limits_{x \to -\infty} \mathrm{th}(x) = -1$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \mathrm{th}(x) = 1$.

6. Justifier que th est une bijection de $\mathbb{R}$ sur un $]-1, 1[$. On note argth la bijection réciproque de la fonction th.

7. Montrer que pour tout $x \in I$, on a $\mathrm{argth}(x) = \dfrac{1}{2} \ln\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)$ (On pourra poser $y = \mathrm{th}(x)$ et montrer $\frac{1+y}{1-y} = e^{2x}$).

8. Justifier que argth est dérivable sur I et préciser sa dérivée.

Exercice 6 (3 points)**.** Soit l'equation différentielle $y''(t) - 5\,y'(t) + 6\,y(t) = 0$.

1. Donner son équation caractéristique.

2. Calculer la solution générale de l'équation différentielle.

3. En déduire la solution satisfaisant aux conditions initiales $y(0) = 1$ et $y'(0) = 0$.