VI. Equations différentielles

Exercice 1. Résoudre les équations différentielles linéaires homogènes d'ordre 1 suivantes :

1. $3y' + 21y = 0$
2. $y' = \sin(t)y$
3. $y' - \dfrac{y}{t} = 0$, déterminer la solution satisfaisant à $f(-1) = 5$

Exercice 2. On place dans un entrepôt une masse R_0 de radium 226, un déchet de la combustion en centrale nucléaire. On admet que la quantité(en grammes) de radium $R(t)$ à l'instant t (exprimé en années) subit un phénomène de désintégration suivant l'équation

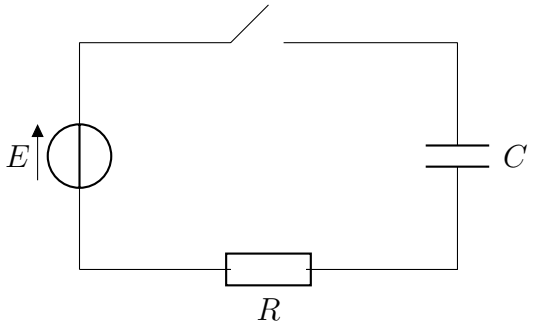
$$R'(t) = -4.3 \cdot 10^{-4} \cdot R(t).$$

Combien de temps faut-il attendre avant que la moitié du radium ait disparu ?

Exercice 3. Résoudre les équations différentielles linéaires non-homogènes d'ordre 1 suivantes (par la "méthode de la variation de la constante") :

1. $y' + 2y = 1$
2. $y' = y - 1 - e^t$
3. $y' = ty + t$
4. $y' + 2y = te^{-2t}$, déterminer la solution satisfaisant à $y(2) = 0$

Exercice 4. On étudie le circuit suivant comportant une résistance de valeur R et un condensateur de capacité C.



La tension $u(t)$ aux bornes du condensateur est solution de l'équation différentielle :

$$u'(t) + \frac{1}{\tau}u(t) = \frac{E}{\tau}$$

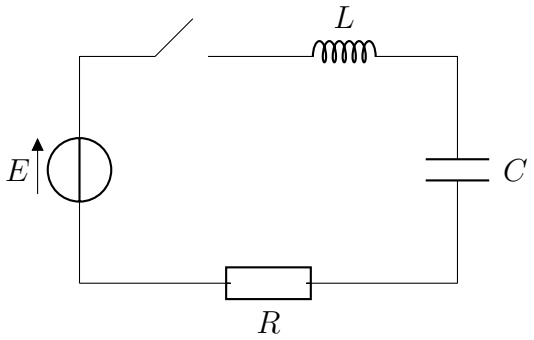
où E est la tension continue délivré par le générateur et $\tau = RC$ est la constante de temps du circuit.
A l'instant $t = 0$, on ferme l'interrupteur et on considère que le condensateur est vide.

1. Résoudre l'équation différentielle.
2. Tracer la courbe $u(t)$ pour $E = 24\text{V}$ et $\tau = 5\text{s}$.
3. Calculer la tension aux bornes du condensateur à l'instant $t = 5\tau$, puis calculer le quotient $\dfrac{u(5\tau)}{E}$ exprimé en pourcentage.

Exercice 5. Résoudre les équations différentielles linéaires homogènes d'ordre 2 à coefficients constants suivantes :

1. $y'' + 6y' + 9y = 0$
2. $y'' - 2y' + 5y = 0$, determiner la solution satisfaisant à $y(\frac{\pi}{2}) = 0$ et $y'(\frac{\pi}{2}) = 1$
3. $2y'' - 8y' + 6y = 0$
4. $-y'' + 5y' - 6y = 0$, déterminer la solution satisfaisant à $y(0) = 1$ et $y'(0) = 0$;
5. $4y'' - 16y' + 16y = 0$
6. $2y'' + 10y' + 20y = 0$

Exercice 6. On étudie le circuit suivant comportant une résistance de valeur R et un condensateur de capacité C et une bobine d'inductance L.



La tension $u(t)$ aux bornes du condensateur est solution de l'équation différentielle :

$$LC \cdot u''(t) + RC \cdot u'(t) + u(t) = E$$

où E est la tension continue délivrée par le générateur.
A l'instant $t = 0$ on considère les conditions initiales $u(t) = 0$ et $u'(t) = 0$.

1. Résoudre l'équation différentielle en considérant les valeurs numériques
$$LC = 20\text{H.F},\ RC = 4\text{s et } E = 50\text{V}.$$
2. Tracer la courbe représentative de $u(t)$.