ACCOMPAGNEMENT DE LA MISE EN ŒUVRE DES PROGRAMMES

Mathématiques - Classe terminale de la série ES

INTRODUCTION D'ELEMENTS DE LA THEORIE DES GRAPHES

Version du 24/09/2001

Direction de l'enseignement scolaire

Bureau du contenu des enseignements

Ce document a été rédigé par Pierre Arnoux, Antoine Bodin, Françoise Cellier, Philippe Clarou, André Laur, Jérôme Giovendo, Gilles Godefroy, Anne Hirlimann, Jean Moussa, Jean-Paul Quelen, Erick Roser, Claudine Robert, Nicolas Rouche et Yohan Yebbou.

SOMMAIRE

Introduction

L'introduction d'éléments de la théorie des graphes dans l'enseignement de spécialité de la classe terminale de la série ES constitue une grande nouveauté :

- pour la première fois, cette branche des mathématiques discrètes fait son entrée dans l'enseignement secondaire français ;
- le travail proposé est axé sur la seule résolution de problèmes et aucunement sur un exposé magistral.

Pourquoi introduire des éléments sur les graphes ?

Ce choix est cohérent tant avec le programme de la classe antérieure qu'avec les exigences de formation ultérieure. On trouve en effet ici quelques applications intéressantes du calcul matriciel développé dans l'option de première ES ; par ailleurs, les problèmes résolus constituent une première approche – volontairement modeste – de situations diverses (gestion de stocks, transports à coûts minimaux, recherche de fichiers dans des ordinateurs, reconnaissance de mots...) auxquelles les élèves pourront être par la suite confrontés.

Pour de nombreux lycéens, le champ mathématique se limite au calcul, à l'étude des fonctions et à la géométrie élémentaire : s'ouvrir sur la théorie des graphes, c'est s'ouvrir à de nouveaux raisonnements, c'est s'entraîner à avoir un autre regard mathématique et finalement, progresser. Enfin le travail fait sur les graphes pourra être investi dans des travaux personnels encadrés.

Pourquoi axer le travail sur la seule résolution de problèmes ?

La théorie des graphes ouvre un grand champ de modélisation conduisant à des solutions efficaces pour de nombreux problèmes ; toute présentation théorique magistrale du sujet est contraire au choix fait ici. De plus, la résolution de problèmes laisse place à l'initiative des élèves, avec un temps nécessaire de tâtonnements et d'essais. L'objectif, ici, est d'apprendre à représenter une situation à l'aide d'un graphe en se posant d'abord les questions suivantes : "quels objets vont tenir le rôle de sommets, lesquels deviennent les arêtes ?".

Un exemple illustrant le type de travail à faire est donné sous la forme d'une liste de 25 exercices permettant de faire le tour de toutes les notions au programme. Bien entendu, cette liste ne revêt aucun caractère officiel. L'optique étant la résolution de problèmes, c'est le bon usage des notions relatives aux graphes, et non la mémorisation de définitions formelles, qui est ici recherchée.

Un lexique a été fourni ; sa fonction est de définir clairement les limites de cet enseignement neuf : toute notion relative à la théorie des graphes, qui ne correspondrait pas à l'un des termes du lexique, est hors programme.

Contenu de ce fascicule

Il précède la publication, courant 2002, du document d'accompagnement des nouveaux programmes des classes terminales. On trouvera ici :

- le programme proprement dit, rédigé en trois colonnes ;
- 25 exercices permettant d'aborder simplement toutes les notions qui figurent au programme ;
- un lexique explicitant ces mêmes notions ;
- une liste des propriétés, qui pourront être soit démontrées, soit commentées mais que tout élève devra connaître et savoir utiliser à bon escient.

Le programme

A titre indicatif, le temps consacré, durant l'année scolaire, à l'étude de ces notions, pourrait représenter 40% du temps total, soit environ 24 heures.

Contenus	Modalités de mise en œuvre	Commentaires
RESOLUTION DE PROBLEMES A L'AIDE DE GRAPHES		
Résolution de problèmes conduisant à la modélisation d'une situation par un graphe orienté ou non, éventuellement étiqueté ou pondéré et dont la solution est associée : - à la coloration d'un graphe, - à la recherche du nombre chromatique, - à l'existence d'une chaîne ou d'un cycle eulérien, - à la recherche d'une plus courte chaîne d'un graphe pondéré ou non, - à la caractérisation des mots reconnus par un graphe étiqueté et, réciproquement, à la construction d'un graphe étiqueté reconnaissant une famille de mots, - à la recherche d'un état stable d'un graphe probabiliste à 2 ou 3 sommets.	Les problèmes proposés mettront en jeu des graphes simples, la résolution pouvant le plus souvent être faite sans recours à des algorithmes. On indiquera que pour des graphes complexes, des algorithmes de résolutions de certains problèmes sont absolument nécessaires. On présentera un algorithme simple de coloration des graphes et un algorithme de recherche de plus courte chaîne.	**Il s'agit d'un enseignement entièrement fondé sur la résolution de problèmes.** L'objectif est de savoir modéliser des situations par des graphes et d'identifier en terme de propriétés de graphes la question à résoudre. Ces algorithmes seront présentés dans les documents d'accompagnement et on restera très modeste quant à leurs conditions de mise en œuvre.
Vocabulaire élémentaire des graphes : sommets, sommets adjacents, arêtes, degré d'un sommet, ordre d'un graphe, chaîne, longueur d'une chaîne, graphe complet, distance entre deux sommets, diamètre, sous-graphe stable, graphe connexe, nombre chromatique, chaîne eulérienne, matrice associée à un graphe, matrice de transition pour un graphe pondéré par des probabilités.	Les termes seront introduits à l'occasion de résolution de problèmes et ne feront pas l'objet d'une définition formelle, sauf lorsque cette définition est simple et courte (degré d'un sommet, ordre d'un graphe par exemple).	Les élèves devront savoir utiliser à bon escient le vocabulaire élémentaire des graphes, vocabulaire qui sera réduit au minimum nécessaire à la résolution des problèmes constituant l'enseignement de cette partie.
Résultats élémentaires sur les graphes : - lien entre la somme des degrés des sommets et le nombre d'arêtes d'un graphe, - conditions d'existence de chaînes et cycles eulériens, - exemples de convergence pour des graphes probabilistes à deux sommets pondérés par des probabilités.	On pourra, dans des cas élémentaires, interpréter les termes de la puissance $n^{\text{ème}}$ de la matrice associée à un graphe.	.

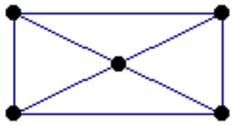
Exercices …

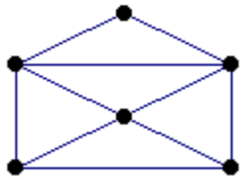
Dans les exemples ci-dessous, on a parfois construit les graphes et donné quelques éléments de réponse afin d'avoir assez vite une idée générale de ce qui est proposé : on indique aussi les contenus illustrés ou introduits dans chacun des exemples proposés.

La théorie des graphes est rarement abordée en France dans le cursus universitaire des enseignants : il s'agit donc d'une nouveauté pour la plupart d'entre eux. Néanmoins, comme s'exerce dans ce domaine un mode de pensée auquel ils sont habitués, ils peuvent envisager cet enseignement sans inquiétude, tant pour eux-mêmes que pour leurs élèves.

Exemple 1 : les enveloppes

Peut-on parcourir une fois et une seule les arêtes des graphes ci-dessous sans lever le crayon ?

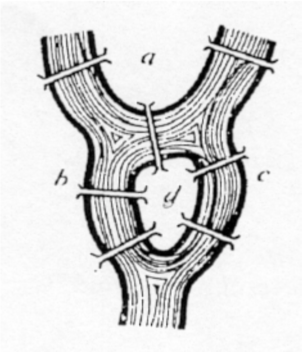


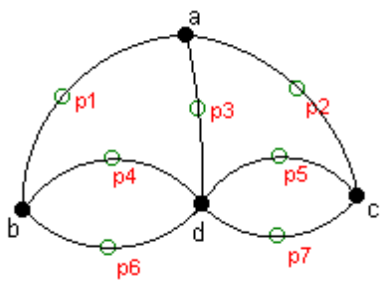


- *Contenu : introduction des graphes (arêtes, sommets, ordre, sommets adjacents) ; degré d'un sommet ; chaîne eulérienne ; théorème d'Euler.*

Exemple 2 : les ponts de Königsberg

Au XVIIIème siècle, les habitants de Königsberg (actuellement Kaliningrad, région de la Russie frontalière de la Pologne et de la Lituanie) aimaient se promener le dimanche. La ville de Königsberg comprenait 7 ponts, disposés selon le schéma ci-dessous. Le souhait des habitants de Königsberg était de faire un trajet passant une fois et une seule par chaque pont. Comment faire ?

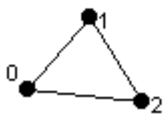


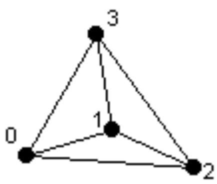


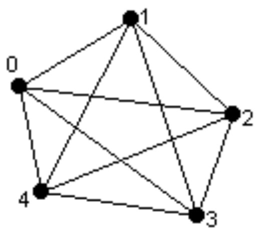
- *Contenu : introduction des graphes (arêtes, sommets, ordre, sommets adjacents) ; degré d'un sommet ; cycle eulérien.*

Exemple 3 : dominos

Peut-on aligner tous les pions d'un jeu de domino suivant la règle du domino ? On commencera par étudier la question avec un jeu dont les dominos comportent les chiffres jusqu'à *n*, pour *n*=2,3,4.







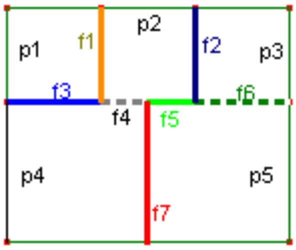
Une arête représente un domino. Il faut trouver une chaîne qui permet de parcourir toutes les arêtes une fois et une seule. On ne s'est pas occupé ici des «doubles » puisqu'on peut toujours les intercaler.

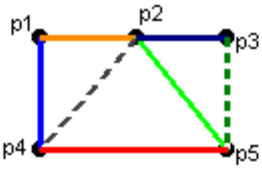
- *Contenu : graphes complets ; chaînes eulériennes ; degré d'un sommet ; théorème d'Euler.*

Exemple 4 : traversée de frontières

Cinq pays sont représentés ci-contre avec leurs frontières.

Est-il possible de partir d'un pays et d'y revenir en franchissant chaque frontière une fois et une seule ?

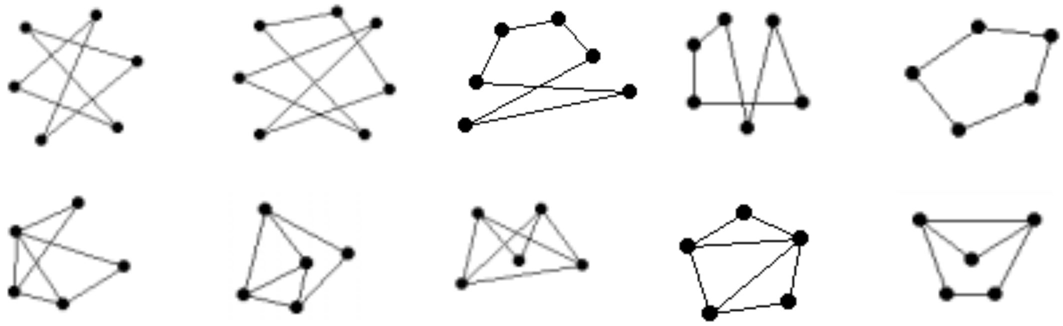




- *Contenu : chaîne eulérienne ; degré d'un sommet ; théorème d'Euler.*

Exemple 5 : dessins de graphes

-Parmi les graphes ci-dessous, déterminer ceux qui sont susceptibles de décrire une même situation.



- Peut-on dessiner des graphes simples (pas d'arêtes dont les extrémités sont confondues, et au plus une arête joignant deux sommets) dont la liste des degrés des sommets soit :

6-3-2-2-1-1-1 7-5-3-2-2-2-2-2

- *Contenu : représentations de graphes ; degrés de sommets.*

Exemple 6 : associer un graphe à une situation

Comparer les trois graphes définis ci-dessous :

- on considère un octaèdre ; un sommet du graphe est associé à un sommet de l'octaèdre et une arête correspond à une arête de l'octaèdre ;

- on considère un cube ; un sommet du graphe est associé à une face du cube et deux sommets du graphe sont reliés par une arête si les faces correspondantes ont une arête commune ;

- les sommets du graphe sont tous les sous-ensembles à deux éléments de {1,2,3,4} ; deux sommets sont reliés si leur intersection est non vide ;

Représenter la situation ci-dessous à l'aide d'un graphe :

Trois pays envoient chacun à une conférence deux espions ; chaque espion doit espionner tous les espions des autres pays.

- *Contenu : représentations de graphes ; sommets, sommets adjacents ; arêtes.*

Exemple 7 : matches de football

Une ligue de football comporte 5 équipes.

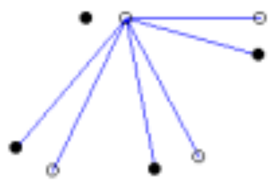
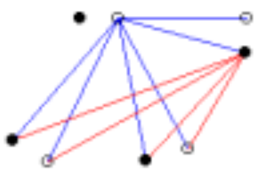
- il est décidé par le bureau de la ligue que lors d'un week-end d'entraînement, chaque équipe jouera quatre matches (deux équipes ne peuvent pas se rencontrer plus d'une fois). Comment l'organiser (chacun est libre de ses règles d'organisation) ?

- le calendrier étant trop chargé, les organisateurs décident que chaque équipe ne jouera que trois matches. Comment l'organiser ?

- *Contenu : degré d'un sommet ; lien entre la somme des degrés des sommets et le nombre d'arêtes.*

Exemple 8 : poignées de main

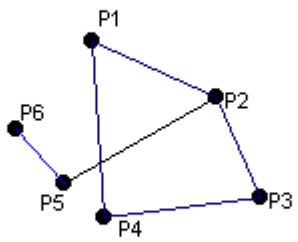
M. et Mme Euler assistent à une réunion. Il y a trois autres couples dans l'assistance et plusieurs poignées de mains sont échangées. Personne ne serre sa propre main et les époux ne se serrent pas la main. Deux personnes quelconques de l'assemblée se serrent la main au plus une fois. M. Euler constate que les 7 autres personnes ont échangé des poignées de mains en nombres tous distincts. Combien de poignées de mains M. et Mme Euler ont-ils échangé avec les autres membres de la réunion ?

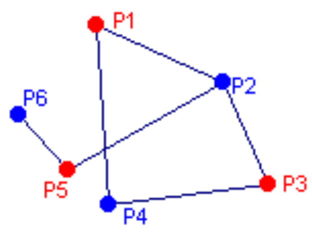
Une personne peut serrer la main d'au plus 6 autres personnes. Pour que le nombre de poignées de mains échangées soient tous distincts, il s'agit nécessairement des nombres 6, 5, 4, 3, 2, 1 et 0.	Une personne a échangé 6 poignées de main ; c'est donc son conjoint qui n'en a échangé aucune. 	Une personne échange 5 poignées de mains ; c'est donc son conjoint qui en échange une seule. 	Une des personnes des deux couples non encore considérés échange 4 poignées de main, donc son conjoint en échange 2. Que reste-t-il pour le dernier couple ?

- *Contenu : introduction des graphes (arêtes, sommets, ordre, sommets adjacents) ; degré d'un sommet.*

Exemple 9 : transport de produits chimiques

On trouvera ci-après le graphe d'incompatibilité de six produits chimiques. Quel est le nombre minimum de wagons nécessaires à leur transport ?

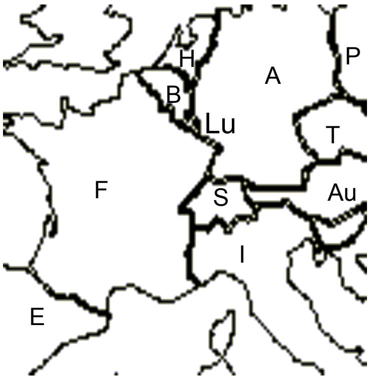


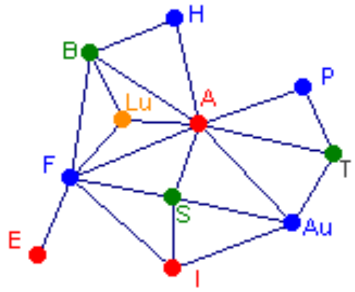


- *Contenu : nombre chromatique.*

Exemple 10 : coloration de la carte de l'Europe

On veut colorer chaque pays de la carte ci-dessous de telle sorte que deux pays voisins ne soient pas de la même couleur. Montrer qu'il faut disposer d'au moins quatre couleurs et que quatre couleurs suffisent. (Deux pays dont les frontières n'ont qu'un nombre fini de points communs ne sont pas considérés comme voisins).





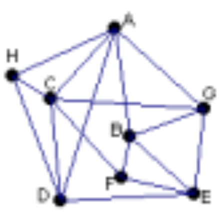
- *Contenu : sous–graphe complet ; nombre chromatique.*

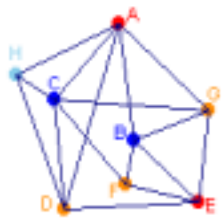
Exemple 11 : un problème d'aquariophile

A, B, C, D, E, F, G et H désignent huit poissons ; dans le tableau ci-dessous, une croix signifie que les poissons ne peuvent cohabiter dans un même aquarium :

	A	B	C	D	E	F	G	H
A		×	×	×			×	×
B	×				×	×	×	
C	×			×		×	×	×
D	×		×		×			×
E		×		×		×	×	
F		×	×		×			
G	×	×	×		×			
H	×		×	×				

Quel nombre minimum d'aquariums faut-il ?





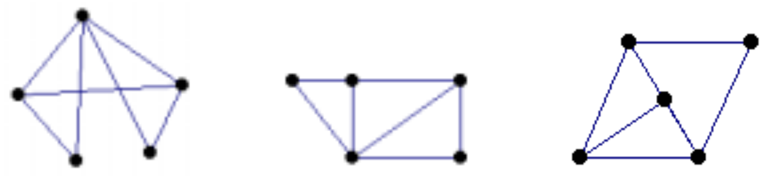
- *Contenu : matrice associée à un graphe ; sous-graphe ; graphe complet ; nombre chromatique.*

Exemple 12 : nombre chromatique

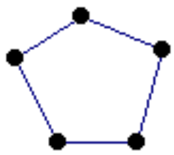
Tracer les graphes associés aux matrices ci-dessous et chercher leur nombre chromatique.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Les graphes ci-dessous peuvent-ils être associés à C ?



Donner des matrices associées au graphe suivant :



- *Contenu : matrices et graphes associés ; nombre chromatique.*

Exemple 13 : organisation d'un examen

On veut organiser un examen comportant, outre les matières communes, 6 matières d'options : Français (F), Anglais (A), Mécanique (M), Dessin industriel (D), Internet(I), Sport (S) ; les profils des candidats à options multiples sont :

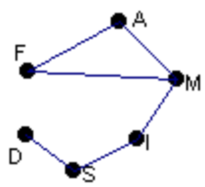
F,A,M D,S I,S I,M

1 - Quel est le nombre maximum d'épreuves qu'on peut mettre en parallèle ?

2 - Une épreuve occupe une demi-journée ; quel est le temps minimal nécessaire pour ces options ?

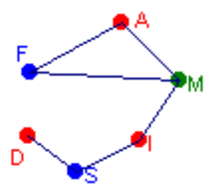
Solution

Le graphe associé à cette situation est le suivant :



1- Tout sous-graphe de plus de trois sommets comporte des arêtes ; deux sous-graphes d'ordre trois (de sommets respectivement A,D,I et F,D,I) n'ont pas d'arêtes : le nombre maximum d'épreuves en parallèle est 3.

2- Il y a un sous-graphe complet d'ordre 3 ; le nombre chromatique est au moins égal à 3 ; on voit que 3 couleurs suffisent.



- *Contenu : sous-graphes ; graphe complet ; nombre chromatique.*

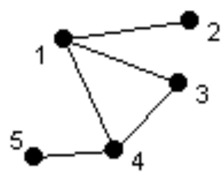
Exemple 14 : ouverture de magasins

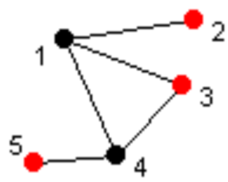
Une chaîne de cinq magasins décide d'ouvrir ses magasins en nocturne avec les contraintes suivantes : les deux premiers magasins ne peuvent pas être ouverts ensemble ; il en est de même pour les deux derniers ; au plus un seul magasin peut être ouvert parmi les magasins 1, 3, 4.

Trouver un état qui maximise le nombre de magasins ouverts en nocturne, tout en respectant les contraintes.

Solution

Il n'y a qu'un seul sous-graphe a trois éléments sans arêtes ; tous les sous-graphes d'ordre 4 ou 5 ont des arêtes.





- *Contenu : sous-graphes.*

Exemple 15 : puissances de la matrice associée à un graphe

Ci-après, la matrice M est associée à un graphe orienté G qu'on représentera.

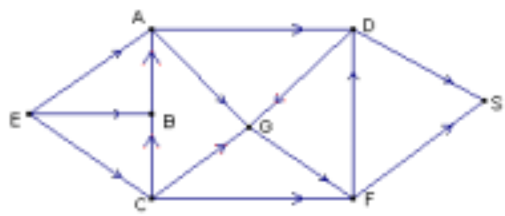
Tracer le graphe et interpréter les termes de M^2, puis de M^3.

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad M^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \qquad M^3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

- *Contenu : graphe orienté ; matrice associée à un graphe orienté ; longueur d'une chaîne.*

Exemple 16 : circuits touristiques

Pour traverser une chaîne de montagnes, il faut passer par plusieurs sommets, reliés entre eux par des voies ne pouvant être franchies que dans un seul sens. On donne ci-dessous le graphe associé à cette situation (E est le point d'entrée et S le point de sortie). L'office de tourisme cherche toutes les traversées qui partent de E et arrivent en S en 4, 5 ou 8 étapes (une étape est le passage d'un sommet à un autre, ou du départ à un sommet, ou d'un sommet à l'arrivée).



Les sommets étant classés dans l'ordre E, A, B, C, G, D, F, S, on a :

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

La première ligne de M^3 est : 0 1 0 0 2 2 2 2

La première ligne de M^4 est : 0 0 0 0 3 3 2 4

La première ligne de M^5 est : 0 0 0 0 3 2 3 5

La première ligne de M^7 est : 0 0 0 0 3 3 2 6

La première ligne de M^8 est : 0 0 0 0 3 2 3 5

Combien de traversée peut-on faire en 4 (resp. 5) étapes ?

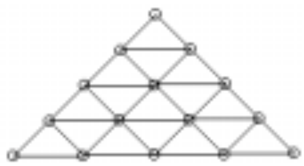
Trouver toutes les traversées possibles en 8 étapes.

- *Contenu : graphe orienté ; matrice associée à un graphe orienté.*

Exemple 17 : coloration de graphes

- Montrer que le nombre chromatique du graphe (1) ci-dessous vaut 3. Pour trois couleurs données, combien y a-t-il de colorations possibles ?

- Montrer que le nombre chromatique du graphe (2) ci-dessous vaut 2.



(1)

(2)

- *Contenu : nombre chromatique, sous-graphes complets.*

Exemple 18 : algorithme de coloration d'un graphe

Algorithme de coloration d'un graphe.

On commence par établir une liste ordonnée des sommets.

Tant qu'il reste des sommets à colorer, exécuter les actions suivantes :

- choisir une nouvelle couleur appelée couleur d'usage ;

- chercher dans la liste des sommets le premier sommet non coloré et le colorer avec la couleur d'usage ;

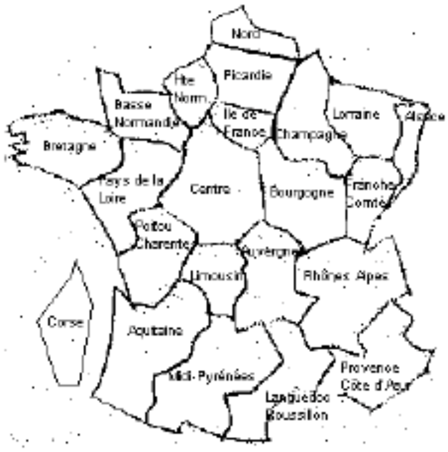
- examiner tour à tour, dans l'ordre de la liste, tous les sommets non colorés et, pour chacun d'eux, le colorer lorsqu'il n'est adjacent à aucun sommet coloré avec la couleur d'usage.

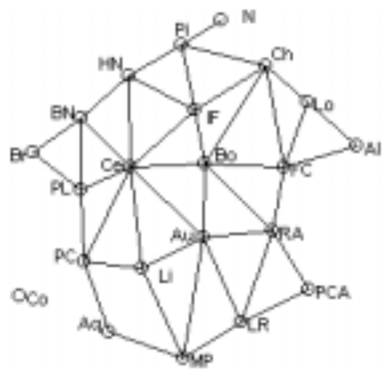
Remarque : cet algorithme fournit un coloration, mais le nombre r de couleurs utilisées peut-être supérieur au nombre chromatique. D'où l'intérêt éventuel de comparer r à un minorant r' du nombre chromatique : si r = r', c'est le nombre chromatique.

On veut colorer chaque région administrative française de telle sorte que deux régions voisines ne soient pas de la même couleur :

- montrer qu’il faut disposer d’au moins quatre couleurs.

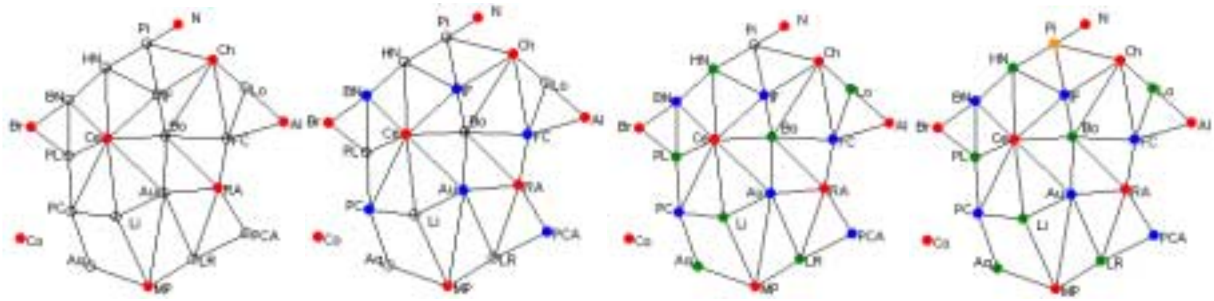
- appliquer l’algorithme ci-dessus.





Solution

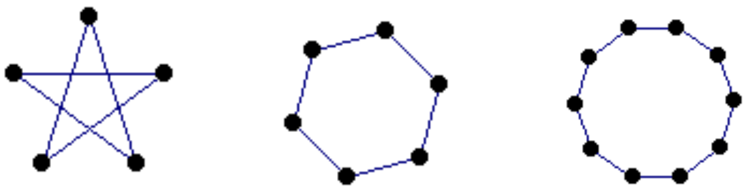
Coloration après avoir ordonné les sommets suivants l'ordre décroissant de leur degré :



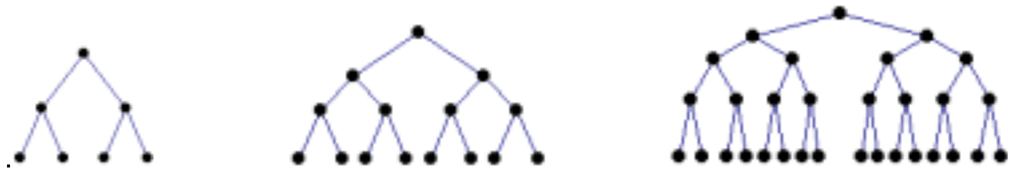
- *Contenu : coloration ; nombre chromatique.*

Exemple 19 : diamètre d’un graphe

1- Caractériser les graphes de diamètre 1.Trouver le diamètre des graphes ci-dessous.



2- Quels sont les diamètres des graphes ci-dessous ? Si on continuait à construire des graphes sur le même modèle, quels seraient les nombres de sommets et d’arêtes en fonction du diamètre ?



3- Quel est le diamètre du graphe ci-dessous ? Si on « continuait » ce graphe, comment évoluerait l'ordre du graphe en fonction du diamètre ?

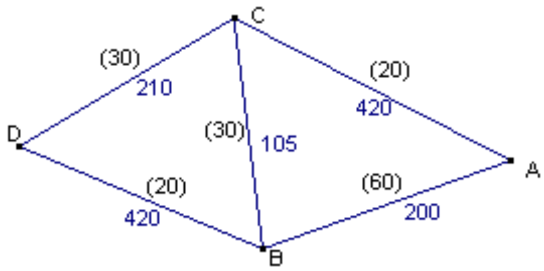
- *Contenu : diamètre d'un graphe*

Exemple 20 : parcours autoroutier

Sur les arêtes du graphe suivant, représentant un réseau autoroutier, on a marqué les distances entre deux étapes et, entre parenthèses, les prix des péages. Entre D et A, déterminer :

- la chaîne la plus courte ;

- la chaîne qui minimise la somme dépensée en péage.

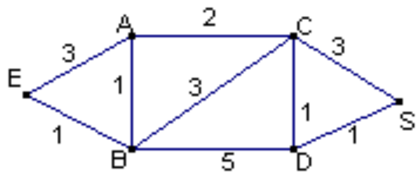


- *Contenu : graphe pondéré ; poids d'une chaîne ; plus courte chaîne.*

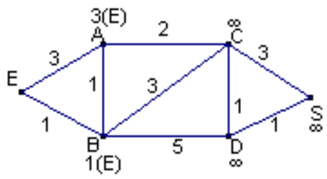
Exemple 21 : algorithme de Dijkstra

On présente ici un algorithme de recherche de la plus courte chaîne entre deux sommets d'un graphe.

Exemple :



Initialisation : on affecte le poids 0 à E et on attribue provisoirement aux sommets adjacents à E les poids des arêtes qui les relient à E, et aux autres sommets le poids +∞. On pose :



Dans la suite, $\mathscr{P}$ désignera l'ensemble des sommets dont le poids est fixé.

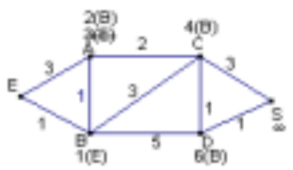
Tant que $\mathscr{P}$ ne contient pas l'ensemble des sommets ou que le sommet S à atteindre n'est pas affecté du plus petit des poids provisoires, exécuter les actions suivantes :

- parmi tous les sommets provisoirement pondérés, fixer définitivement le poids d'un de ceux qui ont un poids minimum ; soit T ce sommet.

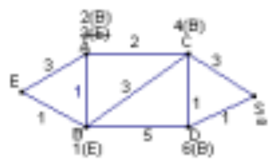
- ajouter T à $\mathscr{P}$.

- pour tout sommet T' n'appartenant pas à $\mathscr{P}$ et adjacent à T, calculer la somme s du poids de T et du poids de l'arête reliant T à T' ; si s est inférieur au poids provisoire de T', affecter s à T' comme nouveau poids provisoire, et le noter s(T) pour marquer ainsi la provenance de cette dernière affectation.

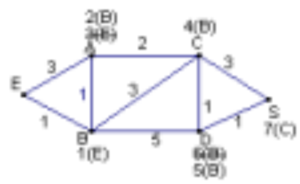
Poids de B fixé



Poids de A fixé



Poids de C fixé

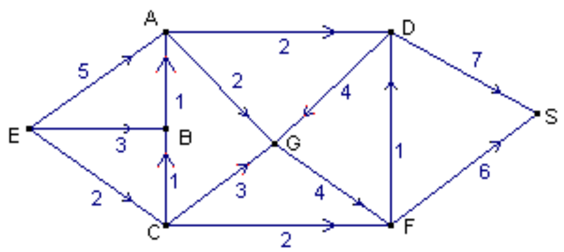


On peut représenter les différentes étapes de l'algorithme, exécuté sur cet exemple, par un tableau où figurent à droite les éléments successifs de $\mathscr{P}$:

E	A	B	C	D	S	$\mathscr{P}$
0	3(E)	1(E)	∞	∞	∞	E
	2(B)	*1(E)*	4(B)	6(B)		E,B
	2(B)					E,B,A
			4(B)	5(C)	7(C)	E,B,A,C
				5(C)	6(D)	E,B,A,C,D
					6(D)	E,B,A,C,D,S

La plus courte chaîne a un poids 6 ; elle se lit ici à l'envers SDCBE : S a un poids 6 venant de D, D est pondéré à partir de C, C à partir deB, B à partir de E.

Le même algorithme s'applique aux graphes orientés. Exemple :



E	A	B	C	D	F	G	S	$\mathscr{P}$
0	5(E)	3(E)	2(E)	∞	∞	∞	∞	E
			2(E)		4(C)	5(C)		E,C
	4(B)	*3(E)*						E,B,C
	4(B)			6(A)				E,B,C,A
				5(F)	*4(C)*		10(F)	E,B,C,A,F
				5(F)				E,B,C,A,F,D
						5(C)		E,B,C,A,F,D,G
							10(F)	E,B,C,A,F,D,G,S

La chaîne la plus courte se lit à l'envers sur le tableau : S, F, C, E. Elle a pour longueur 10.

- *Contenu : graphe pondéré ; poids d'une chaîne ; plus courte chaîne.*

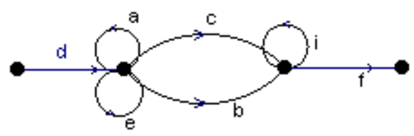
Exemple 22 : reconnaissance de codes

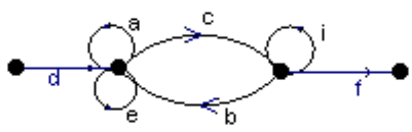
Un réseau informatique doit être accessible à un grand nombre de personnes, qui ne doivent cependant pas avoir le même code d'accès. Cet accès est régi par un des graphes étiquetés ci-dessous ; un mot est accepté comme code d'accès (ou reconnu) si c'est une liste de lettres commençant par d et terminant par f, associée à une chaîne de ce graphe.

- Les mots « decif » et « daaeebiif » sont-ils des mots reconnus par les graphes étiquetés ci-dessous ?

- Donner, pour chaque graphe ci-dessous, la liste des mots de 5 lettres reconnus.

- Caractériser pour chaque graphe les mots reconnus.





- *Contenu : graphe étiqueté.*

Exemple 23 : l'allumeur de réverbère

Chaque matin, l'allumeur de réverbère du Petit Prince change l'état du réverbère de sa planète avec une probabilité 0,75. Au jour 0, le réverbère est éteint.

- Qu'observe-t-on en simulant une grande population de réverbères régis par le même système probabiliste de changements d'états ?

- Faire un arbre permettant de trouver l'état probabiliste du réverbère au deuxième jour.

- Décrire cette situation à l'aide d'un graphe probabiliste. Soit M la matrice de transition associée à ce graphe.

- Soit M la matrice de transition associée à ce graphe :

Vérifier que $M = N - \frac{1}{2}R$, où $N = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$ et $R = \begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 \\ -1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$.

Calculer N^2, R^2, NR et RN puis en déduire M^n, pour n entier naturel.

- Au jour 0, le réverbère est allumé (resp. éteint). Calculer la probabilité p_n (resp. p'_n) que le réverbère soit allumé (resp. éteint) au $n^{\text{ième}}$ matin. Faire le lien avec les résultats des simulations observées en 1.

Remarque : on peut varier cet exemple en utilisant l'égalité matricielle suivante, où a et b sont des nombres dans]0,1[*, et en calculant ainsi aisément la puissance* $n^{\text{ième}}$ *d'une matrice de transition associée à un graphe probabiliste :*

$$\begin{pmatrix} 1-a & a \\ b & 1-b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b/(a+b) & a/(a+b) \\ b/(a+b) & a/(a+b) \end{pmatrix} + (1-a-b)\begin{pmatrix} a/(a+b) & -a/(a+b) \\ -b/(a+b) & b/(a+b) \end{pmatrix}$$

- *Contenu : graphe probabiliste ; matrice de transition ; état probabiliste.*

Exemple 24 : transferts de population

Deux villes X et Y totalisent une population d'un million d'habitants. La ville X est plus agréable, mais la ville Y offre de meilleurs salaires ; 20% des habitants de Y partent chaque année habiter X pour avoir un cadre de vie meilleur, et 5% des habitants de X partent chaque année habiter Y pour augmenter leur niveau de vie.

- Sachant qu'en l'année 0, un quart des habitants sont en X, calculer la population de X et de Y au bout de 1, 2, 5, 10 ans.

- Que se passe-t-il si on suppose que 99% des habitants sont initialement en Y ou en X ? que la population est également répartie entre les deux villes (500 000 dans chaque ville en l'année 0) ? Que constate-t-on ?

Remarque : on pourra refaire le problème en variant, non plus les conditions de départ, mais les coefficients de transition : 15% et 5%, ou 40% et 20%, par exemple.

- *Contenu : graphe probabiliste ; matrice de transition.*

Exemple 25 : un problème d'endémie

Un individu vit dans un lieu où il est susceptible d'attraper une maladie par piqûre d'insecte. Il peut être dans l'un des trois états suivants : immunisé (I), malade (M), non malade et non immunisé (S). D'un mois à l'autre, son état peut changer suivant les règles suivantes :

- étant immunisé, il peut le rester avec une probabilité 0,9 ou passer à l'état S avec une probabilité 0,1 ;

- étant dans l'état S, il peut le rester avec une probabilité 0,5 ou passer à l'état M avec une probabilité 0,5 ;

- étant malade, il peut le rester avec une probabilité 0,2 ou passer à l'état I avec une probabilité 0,8.

Tracer un graphe probabiliste pour décrire cette situation et écrire la matrice de transition. Calculer (avec une calculatrice ou un ordinateur) la probabilité qu'il soit malade ou immunisé au bout de trois mois, de six mois, d'un an, de deux ans, pour chacune des situations suivantes :

- au départ, il est immunisé,

- au départ, il est non malade et non immunisé,

- au départ, il est malade.

Pouvez-vous donner des éléments sur la proportion d'individus malades dans la population étudiée ?

Solution

Au bout d'un an, de deux ans, de trois ans, etc. quel que soit l'état initial, l'individu considéré a une probabilité 0,755 d'être immunisé, 0,151 d'être non malade et non immunisé, 0,094 d'être malade. L'état (0,755 ; 0,151 ; 0,094) est stable. La maladie touche donc en permanence environ 9,4% de la population.

- *Contenu : graphe probabiliste ; matrice de transition ; état probabiliste.*

Lexique

La plupart des termes de ce lexique correspondent à leur sens intuitif et ne doivent pas faire l'objet de définitions formelles ; ils seront peu à peu introduits à l'occasion des exercices résolus. Le but de ce lexique est de délimiter nettement le type de problèmes à proposer aux élèves : le vocabulaire donné doit suffire pour les résoudre.

La terminologie proposée ici pour les graphes non orientés est la plus répandue dans les ouvrages de langue française.

Dans le cas d'un graphe orienté, on ajoutera l'adjectif "orienté" lorsque cela s'avérera nécessaire.

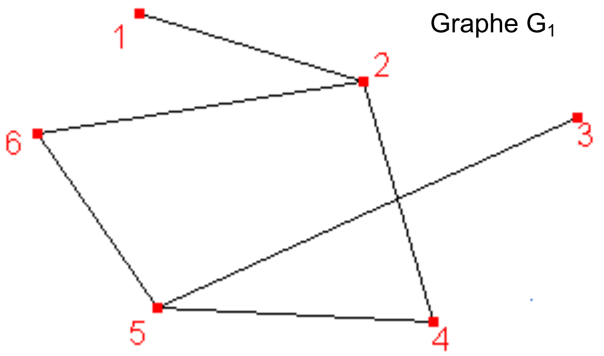
Les pages suivantes proposent une explicitation du vocabulaire de la théorie des graphes qui figure au programme. Les "définitions" et les exemples donnés distinguent :

- les graphes non orientés ;
- les graphes orientés.

Graphes non orientés

Un **graphe** est constitué de **sommets**, dont certains sont reliés par des **arêtes**. Deux sommets reliés par une arête sont **adjacents**. Le nombre de sommets présents dans un graphe est **l'ordre du graphe**. Le **degré** d'un sommet est le nombre d'arêtes dont ce sommet est une extrémité.

Le graphe G_1 *est d'ordre 6 ; les sommets 1 et 2 sont adjacents, puisque reliés par une arête. Ce n'est pas le cas des sommets 5 et 2. Le degré du sommet 5 est égal à 3.*



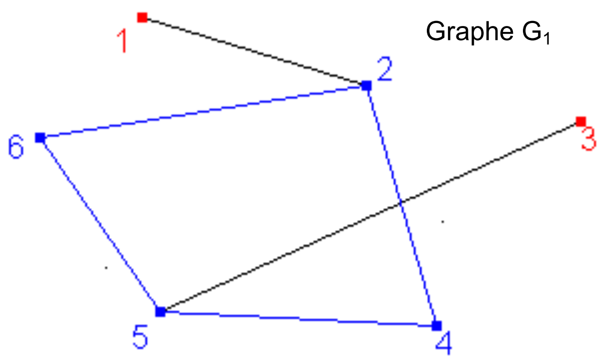
La **matrice associée à un graphe** d'ordre n dont les sommets sont numérotés de 1 à n est une matrice symétrique, de dimension $n \times n$, où le terme à l'intersection de la i-ème ligne et de la j-ème colonne vaut k, nombre d'arêtes reliant i et j.

La matrice 6×6 ci-contre est la matrice associée au graphe G_1 *; elle ne contient que des 0 et des 1 puisque deux sommets quelconques de ce graphe sont au plus reliés par une arête. C'est d'ailleurs à ce type de graphe que l'on se restreindra le plus souvent.*

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

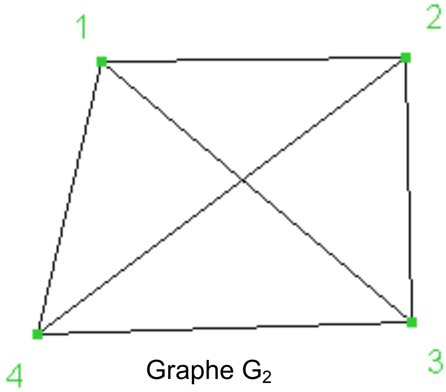
Un **sous-graphe** d'un graphe G est un graphe G' composé de certains sommets de G, ainsi que toutes les arêtes qui relient ces sommets.

Ci-contre, on a choisi, pour construire le sous-graphe G' (en bleu) les sommets 2, 4, 5 et 6. Les arêtes qui reliaient dans G_1 *ces sommets (en bleu aussi) sont les arêtes du sous-graphe G'.*



On appelle **graphe complet** un graphe dont tous les sommets sont adjacents.

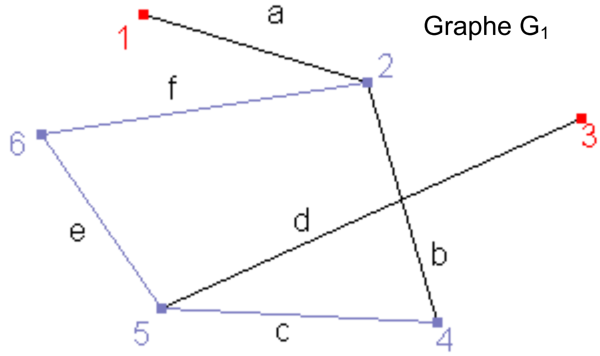
Le graphe G_2 *est un graphe complet d'ordre 4.*



Graphe G_2

Une **chaîne** est une liste ordonnée de sommets telle que chaque sommet de la liste soit adjacent au suivant. La **longueur** d'une chaîne est le nombre d'arêtes qui la composent

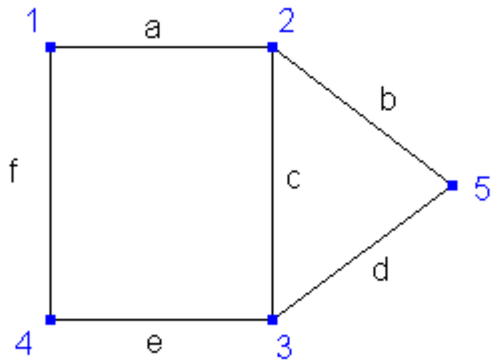
Dans le graphe G_1*, on a nommé les 6 arêtes a, b, c, d, e et f. La liste ordonnée de sommets* (2-6-5-4) *est une chaîne, que l'on peut aussi noter, en utilisant les arêtes qui la composent,* (f/e/c). *La longueur de cette chaîne vaut 3*.



Graphe G_1

Une **chaîne fermée** est une chaîne dont l'origine et l'extrémité sont confondues ; un **cycle** est une chaîne fermée composée d'arêtes toutes distinctes.

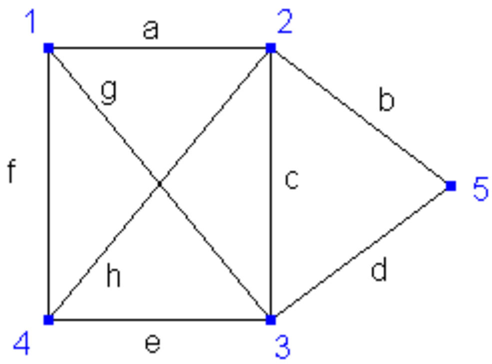
Dans le graphe G_3*,* (1-2-3-5-2-1) *est une chaîne fermée que l'on pourrait aussi noter* (a/c/d/b/a). *Ce n'est pas un cycle, puisque l'arête a y intervient deux fois. En revanche,* (a/c/e/f) *est un cycle*.



Graphe G_3

Une **chaîne eulérienne** est une chaîne qui contient une fois et une seule chaque arête du graphe. Si cette chaîne est un cycle, on parle de **cycle eulérien**.

Dans le graphe G_4*,* (g/c/b/d/e/h/a/f) *est une chaîne eulérienne.*

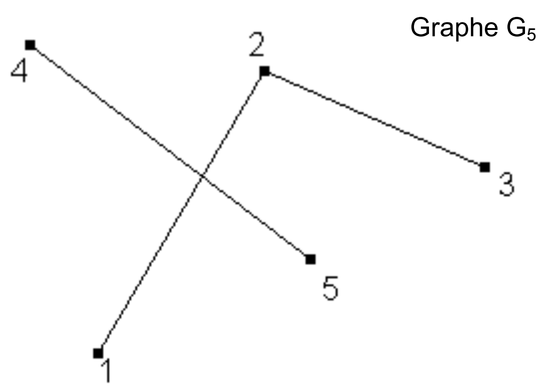


Graphe G_4

Un graphe est dit **connexe** s'il existe une chaîne entre deux sommets quelconques de ce graphe.

Le graphe G_4 *est connexe.*

Le graphe G_5 *ne l'est pas : il n'existe pas de chaîne entre les sommets 5 et 3 par exemple.*

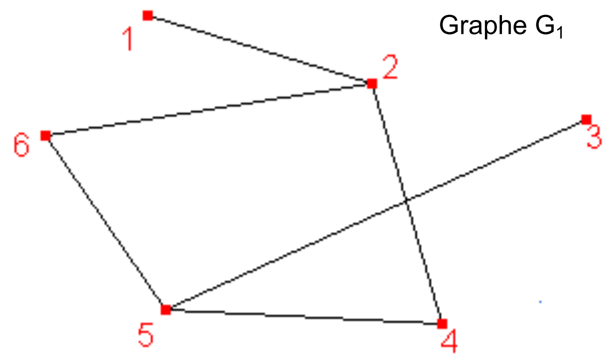


La **distance** entre deux sommets est la plus courte longueur des chaînes qui les relient. Le **diamètre** d'un graphe est la plus grande distance entre deux sommets.

Reprenons le graphe G_1 *:*

- il existe une chaîne de longueur 2 entre les sommets 1 et 4 : la chaîne (1-2-4). *Ces deux sommets n'étant pas adjacents, la distance entre 1 et 4 vaut 2.*

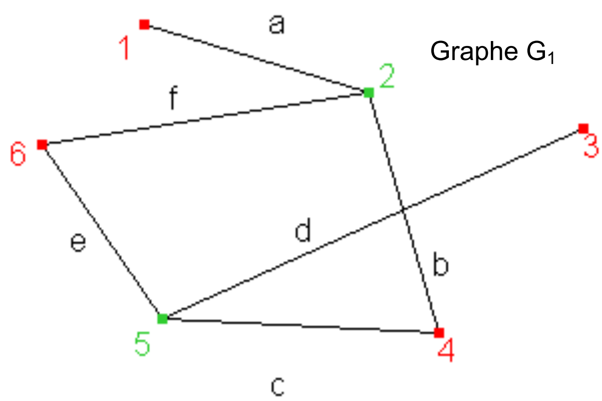
- le diamètre du graphe est 4 : en effet, la distance entre les sommets 1 et 3 vaut 4. On peut vérifier "à la main" qu'il n'existe pas de distance plus grande entre deux sommets.



Colorer un graphe consiste à affecter une couleur à chacun de ses sommets de sorte que deux sommets adjacents ne portent pas la même couleur.

Le **nombre chromatique** d'un graphe est le plus petit nombre de couleurs permettant de le colorer.

Le graphe G_1 *a pour nombre chromatique 2 ; en effet, il faut au moins deux couleurs pour colorer ce graphe puisqu'il y existe des sommets adjacents. En outre, on vérifie que 2 couleurs suffisent.*



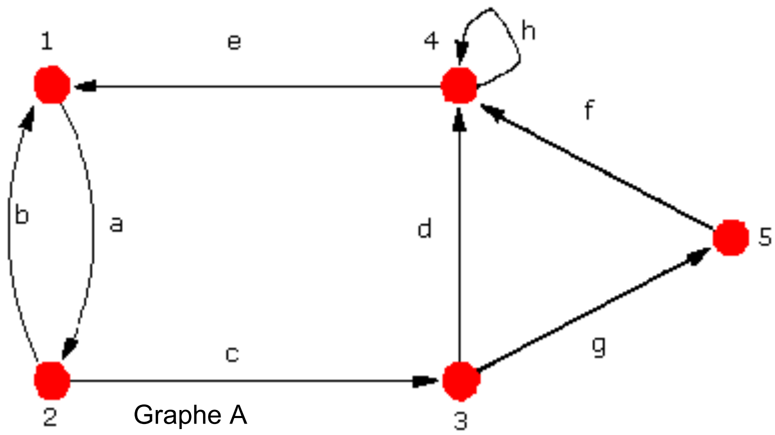
Graphes orientés

Un **graphe orienté** est un graphe dont les arêtes sont orientées : on parle alors de l'origine et de l'extrémité d'une arête. Une **boucle** est une arête orientée dont l'origine et l'extrémité sont les mêmes.

On définit de même une chaîne orientée, une chaîne eulérienne orientée, un cycle orienté...

Le graphe A *ci-contre est orienté. L'arête* a *qui va de 1 vers 2 est distincte de l'arête* b*, qui va de 2 vers 1. L'arête* h *est une boucle.*

(1-2-3-5) *est une chaîne orientée qui va de 1 à 5.* (e/a/c/d) *est un cycle orienté.*



Graphe A

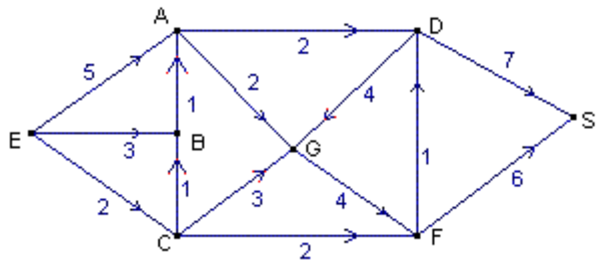
La **matrice associée à un graphe orienté** d'ordre n est une matrice de dimension $n \times n$, où le terme à l'intersection de la i-ème ligne et de la j-ème colonne vaut 1 s'il y a une arête dont l'origine est i et l'extrémité est j.

Ci-contre, on a la matrice associée au graphe A.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

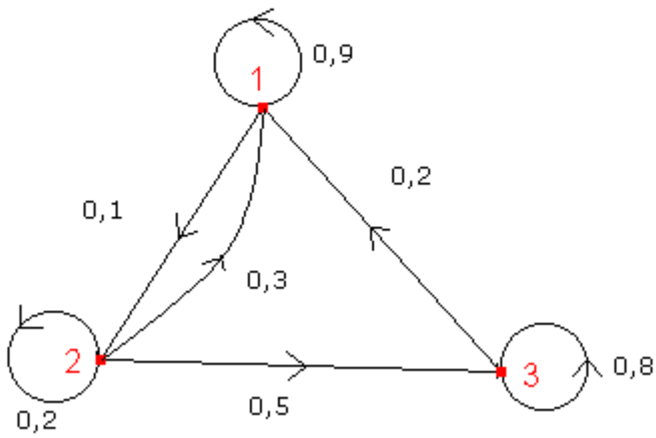
Un **graphe étiqueté** est un graphe orienté, dont les arêtes sont affectées d'étiquettes. Si toutes les étiquettes sont des nombres positifs, on parle de **graphe pondéré**. Dans ce cas, le **poids** d'une chaîne est la somme des poids des arêtes orientées qui la composent. Une **plus courte chaîne** entre deux sommets, est parmi les chaînes qui les relient, une chaîne de poids minimum.

Le graphe orienté ci-contre est pondéré. Le chaîne (C-B-A-G-F)*, a pour poids* 1 + 1 + 2 + 4 = 8.



Un **graphe probabiliste** est un graphe orienté, pondéré, tel que la somme des poids des arêtes sortant de chaque sommet donné vaut 1.

Les graphes probabilistes sont utilisés pour modéliser l'évolution d'un individu pouvant changer aléatoirement d'état : les sommets du graphe sont les états possibles de l'individu et le poids d'une arête orientée issue du sommet i, et d'extrémité j est la probabilité de transition de l'état i à l'état j. L'**état probabiliste** de l'individu est une loi de probabilité sur l'ensemble des états possibles : cette loi sera ici représentée par une matrice ligne.



Un graphe probabiliste peut aussi être utilisé pour décrire l'évolution d'un système formé de plusieurs composants pouvant se trouver dans différents états (l'ensemble des états est le même pour chaque composant). L'état du système à un instant donné est la matrice ligne donnant le nombre de composants du système dans chaque état.

La **matrice de transition** d'un graphe probabiliste d'ordre n est de dimension $n×n$. Le terme à l'intersection de la i-ème ligne et de la j-ème colonne a pour valeur le poids de l'arête orienté allant de i vers j si cette arête existe, 0 sinon.

Le graphe d'ordre 3 ci-dessus est un graphe probabiliste. Sa matrice de transition est donnée ci-contre. La somme des éléments d'une ligne vaut 1.

$$\begin{pmatrix} 0{,}9 & 0{,}1 & 0 \\ 0{,}3 & 0{,}2 & 0{,}5 \\ 0{,}2 & 0 & 0{,}8 \end{pmatrix}$$

Propriétés

Les propriétés ci-dessous sont au programme ; elles seront introduites à l'occasion de certains exercices. Elles pourront être démontrées ou commentées.

Les élèves devront les connaître.

1. La somme des degrés d'un graphe non orienté est égal à deux fois le nombre d'arêtes du graphe.

2. Soit A la matrice associée à un graphe. Le terme (i,j) de la matrice A^n donne le nombre de chaînes de longueur n reliant i à j.

3. Le nombre chromatique d'un graphe est inférieur ou égal à $\Delta+1$, Δ étant le plus haut degré des sommets.

4. Théorème d'Euler : "un graphe connexe admet une chaîne eulérienne si et seulement si le nombre de sommets de degré impair vaut 0 ou 2. Un graphe admet un cycle eulérien si et seulement si tous ses sommets sont de degré pair."

5. Si M est la matrice de transition d'un graphe probabiliste à n sommets, si P_0 est la matrice ligne décrivant l'état initial, et P_n l'état probabiliste à l'étape n, on a $P_n = P_0 \times M^n$.

6. Pour tout graphe probabiliste d'ordre 2, dont la matrice de transition ne comporte pas de 0, l'état P_n à l'étape n, converge vers un état P indépendant de l'état initial P_0. De plus, P vérifie P = PM.