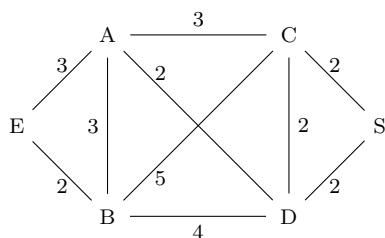


Tices – Examen

Exercice 1. On considère le graphe pondéré G suivant :



1. A l'aide de l'algorithme de Dijkstra, déterminer le plus court chemin entre E et S .
2. Déterminer le nombre chromatique $\chi(G)$ de G .

Exercice 2. On considère la fonction f définie de $\mathbb{R} \setminus \{3\}$ dans \mathbb{R} par

$$f(x) = (x + 1) \ln(|x - 3|).$$

A l'aide de Xcas,

1. Calculer la dérivée première f' de f et seconde f'' de f .
2. Calculer les limites de f' en $-\infty$ et en 3 à gauche.
3. Montrer que f' ne s'annule qu'une seule fois en α sur $] -\infty, 3[$. Donner un encadrement de α d'amplitude 0.1.
4. Etudier le signe de $f'(x)$ sur $\mathbb{R} \setminus \{3\}$, en déduire les variations de f .
5. Tracer la courbe C de f dans un repère orthonormée.
6. Calculer l'aire en cm^2 de la région comprise entre C , l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = -1$, $x = 2$.

Exercice 3. Le but de cet exercice est l'étude de l'astroïde. Le nom des objets créés sous GeoGebra ne doivent pas nécessairement être les mêmes que ceux donnés dans l'énoncé.

Pour $\alpha \in [0, 1]$ un réel, on définit $A_\alpha, B_\alpha, A'_\alpha, B'_\alpha$ les points de coordonnées

$$A_\alpha = (0, \alpha), \quad B_\alpha = (1 - \alpha, 0), \quad A'_\alpha = (0, -\alpha) \quad \text{et} \quad B'_\alpha = (\alpha - 1, 0)$$

1. Dans GeoGebra, créer un curseur N allant de 10 à 100 et un curseur n allant de 0 à N .
2. Créer les points $A_\alpha, B_\alpha, A'_\alpha$ et B'_α pour $\alpha = n/N$.
3. Dessiner les segments $S_1(\alpha) = [A_\alpha B_\alpha]$, $S_2(\alpha) = [B_\alpha A'_\alpha]$, $S_3(\alpha) = [A'_\alpha B'_\alpha]$ et $S_4(\alpha) = [B'_\alpha A_\alpha]$ en rouge.
4. A l'aide d'une animation de curseur afficher la figure

$$\text{Astr}_N = \bigcup_{n=0}^N \bigcup_{i=1}^4 S_i \left(\frac{n}{N} \right)$$

On note $L(\alpha)$ le losange $A_\alpha B_\alpha A'_\alpha B'_\alpha$.

5. Tracer le périmètre $p(\alpha)$ de $L(\alpha)$ en fonction de α pour $\alpha \in \left\{ \frac{n}{N} \mid n \in \{0, \dots, N\} \right\}$.
6. Tracer l'aire $a(\alpha)$ de $L(\alpha)$ en fonction de α pour $\alpha \in \left\{ \frac{n}{N} \mid n \in \{0, \dots, N\} \right\}$.
7. Déterminer les équations de $p(\alpha)$ et $a(\alpha)$.
8. Confronter les équations obtenues avec les résultats expérimentaux obtenus dans GeoGebra.
9. Pour quelle(s) valeur(s) de α , le périmètre et l'aire de $L(\alpha)$ sont-ils minimaux ? maximaux ?

Exercice 4. Le but de cet exercice est l'étude de la suite définie par récurrence linéaire par $u_0 = u_1 = 1$ et $u_n = u_{n-1} + 2u_{n-2}$ pour $n \geq 2$.

1. Calculer les 30 premiers termes de la suite de u_n à l'aide d'un tableur.
2. Représenter les valeurs obtenues sur un graphique.
3. Calculer le rapport $v_n = u_{n+1}/u_n$ pour $n = 0, \dots, 29$.
4. Créer un graphique représentant la suite (v_n) pour $n = 0, \dots, 29$.
5. Que pouvez-vous conjecturer ?

Pour $n \in \mathbb{N}$, on note U_n le vecteur $\begin{bmatrix} u_n \\ u_{n-1} \end{bmatrix}$.

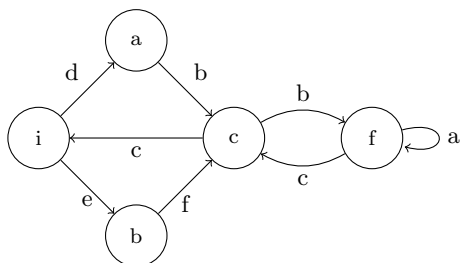
6. Que vaut U_1 ?
7. Déterminer la matrice A vérifiant $U_n = A \times U_{n-1}$ pour $n \geq 2$.
8. Déterminer U_n en fonction de A et de U_1 .
9. Calculer, à l'aide de **Xcas**, les valeurs propres de A .
10. A est-elle diagonalisable ?
11. Déterminer une matrice P inversible P et une matrice diagonale D tel qu'on ait $A = PDP^{-1}$.
12. Calculer A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.
13. Donner une expression de u_n ne dépendant que de n pour $n \in \mathbb{N}$.
14. Vérifier la formule obtenue à l'aide du tableur pour les 30 premières valeurs de u_n .

Exercice 5. Ecrire un algorithme **AlgoBox** retournant une approximation de e basée sur la formule :

$$e = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}.$$

L'utilisateur devra saisir un entier n correspondant au nombre de termes de la série utilisés pour l'approximation.

Exercice 6. Le digicode d'une porte d'entrée d'un immeuble est régi par l'automate suivant :



Le sommet initial est noté i et le final est noté f .

1. Parmi les codes **dbba**, **cbba**, **efcd**, **efcdb**, **dbca**, lesquels sont acceptés.
2. Combien de codes de longueur 8 ce digicode accepte-t-il ? (On pourra utiliser **Xcas**).