**Université du Littoral** **2014-2015**
**Master 1 ère année** **MEEF**

# Tices – Examen

---

**Exercice 1.** Le but de cet exercice est de calculer une valeur approchée de $\pi$ à l'aide de la formule de Machin.
On rappelle que la le développement en série entière de la fonction arctangente est

$$\forall x \in [-1,1] \quad \arctan(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1}$$

Soit $\alpha \in [-1,1]$, on pose $\theta = \arctan(\alpha)$.

**1.** A l'aide de `Xcas` et de la formule

$$\tan(a+b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \times \tan b}$$

calculer successivement $\tan(2\theta)$, $\tan(4\theta)$ et $\tan(4\theta - \pi/4)$.

**2.** Que vaut $\tan\left(4\theta - \frac{\pi}{4}\right)$ pour $\theta = \arctan\left(\frac{1}{5}\right)$ ?

**3.** En déduire la formule de Machin :

$$\frac{\pi}{4} = 4\arctan\left(\frac{1}{5}\right) - \arctan\left(\frac{1}{239}\right).$$

**4.** Ecrire un algorithme qui étant donnés $x \in [-1,1]$ et $n \in \mathbb{N}$ retourne

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1},$$

valeur approchée de $\arctan(x)$.

**5.** En déduire un algorithme retournant une valeur approchée de $\pi$. Cet algorithme prendra en paramètre un entier $n$ correspondant aux nombres de termes calculés dans les séries entières de arctan.

**Exercice 2.** Le but de cet exercice est l'étude de la suite de Fibonacci. La suite de Fibonacci est définie par $u_0 = u_1 = 1$ et $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$.

**1.** Calculer les 30 premiers termes de la suite de Fibonacci à l'aide d'un tableur.

**2.** Représenter les valeurs obtenues par un graphique.

**3.** Calculer le rapport $v_n = \frac{u_{n+1}}{u_n}$ pour $n = 0, ..., 29$.

**4.** Créer un graphique représentant la suite $(v_n)$ pour $n = 0...29$.

**5.** Que pouvez-vous conjecturer ?

Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $U_n$ le vecteur $\begin{bmatrix} u_n \\ u_{n-1} \end{bmatrix}$.

**6.** Que vaut $U_1$ ?

**7.** Déterminer la matrice $A$ vérifiant $U_{n+1} = A \times U_n$.

**8.** Déterminer $U_n$ en fonction de $A$ et de $U_1$.

**9.** Calculer, à l'aide de `Xcas`, les valeurs propres de $A$.

**10.** A est-elle diagonalisable ?

**11.** Déterminer une matrice inversible $P$ et une matrice diagonale $D$ tel qu'on ait $A = PDP^{-1}$.

**12.** Calculer $A^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

**13.** Donner une expression de $u_n$ ne dépendant que de $n$ pour $n \in \mathbb{N}$.

**14.** Vérifier la formule obtenue à l'aide du tableur pour les 30 premières valeurs de $u_n$.

**Exercice 3.** Le but de cet exercice est l'étude de l'astroïde.

Pour $\alpha \in [0,1]$ un réel, on définit $A_\alpha$, $B_\alpha$, $A'_\alpha$, $B'_\alpha$ les points de coordonnées

$$A_\alpha = (0,\alpha), \quad B_\alpha = (1-\alpha, 0), \quad A'_\alpha = (0,-\alpha) \quad \text{et} \quad B'_\alpha = (\alpha - 1, 0)$$

**1.** Dans `GeoGebra`, créer un curseur $N$ allant de 10 à 100 et un curseur $n$ allant de 0 à $N$.

**2.** Créer les points $A_\alpha, B_\alpha, A'_\alpha$ et $B'_\alpha$ pour $\alpha = \dfrac{n}{N}$.

**3.** Dessiner les segments $S_1(\alpha) = [A_\alpha B_\alpha]$, $S_2(\alpha) = [B_\alpha A'_\alpha]$, $S_3(\alpha) = [A'_\alpha B'_\alpha]$ et $S_4(\alpha) = [B'_\alpha A_\alpha]$ en rouge.

**4.** A l'aide d'une animation de curseur afficher la figure

$$\mathrm{Astr}_N = \bigcup_{n=0}^{N} \bigcup_{i=1}^{4} S_i\left(\frac{n}{N}\right)$$

On note $L(\alpha)$ le losange $A_\alpha B_\alpha A'_\alpha B'_\alpha$.

**5.** Tracer le périmètre $p(\alpha)$ de $L(\alpha)$ en fonction de $\alpha$ pour $\alpha \in \left\{ \frac{n}{N} \,|\, n \in \{0, ..., N\} \right\}$.

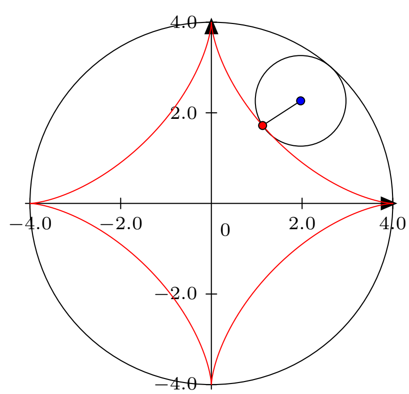
**6.** Tracer l'aire $a(\alpha)$ de $L(\alpha)$ en fonction de $\alpha$ pour $\alpha \in \left\{ \frac{n}{N} \,|\, n \in \{0, ..., N\} \right\}$.

**7.** Déterminer les équations de $p(\alpha)$ et $a(\alpha)$.

**8.** Confronter les équations obtenues avec les résultats expérimentaux obtenus dans `GeoGebra`.

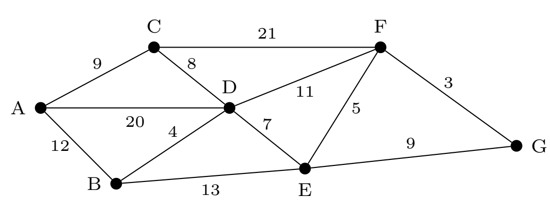
**9.** Pour quelle(s) valeur(s) de $\alpha$, le périmètre et l'aire de $L(\alpha)$ sont-ils minimaux ? maximaux ?

**10.** L'astroïde $\mathrm{Astr}_\infty$ peut être obtenu comme le lieu d'un point $P$ se trouvant à la circonférence d'un cercle $\mathcal{C}$ de rayon 1 roulant à l'intérieur d'un cercle de rayon 4. Illustrer cette construction à l'aide de `GeoGebra` (sur une autre feuille).




**Exercice 4.**

Le but de cet exercice est l'étude du graphe $\mathcal{G}$ :




**1.** Le graphe $\mathcal{G}$ possède t-il une chaîne eulérienne ? Si oui en donner une.

**2.** Donner la matrice d'adjacence du graphe $\mathcal{G}$.

**3.** Combien existe t-il de chemins de longueur 5 reliant $A$ à $G$ ? Et de chemin de longueur 8 ? (L'utilisation de `Xcas` est fortement recommandée.)

**4.** Déterminer un majorant du nombre chromatique $\chi(\mathcal{G})$.

**5.** Déterminer un minorant du nombre chromatique $\chi(\mathcal{G})$.

**6.** A l'aide de l'algorithme de Dijkstra, déterminer le plus court chemin allant de $A$ à $G$.