IUT Littoral **2019 - 2020**
Info 2A **Ana. Num. – C++**

TP 3 - Introduction aux méthodes de Runge–Kutta - Correction

Exercice 1.

a. On a $d = 1$, $y_0 = 1$ et

$$\begin{array}{rcl} f : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ (t, y) & \mapsto & 2\,y \end{array}$$

b. La dérivée de la fonction $t \mapsto e^{at}$ étant ae^{at}, nous obtenons que les solutions de l'équation différentielle sont de la forme $y(t) = \lambda e^{2t}$. La condition $y(0) = 1$ donne $\lambda e^{0\times t} = 1$ puis $\lambda = 1$. La solution de l'équation différentielle est donc $y(t) = e^{2t}$.

Exercice 2.

a. Les inconnues de (1) sont $\theta(t)$ et $\omega(t) = \theta'(t)$. Nous posons alors $y(t) = \begin{bmatrix} \theta(t) \\ \omega(t) \end{bmatrix}$.

b. Nous avons $d = 2$ ainsi que

$$y_0 = y(0) = \begin{bmatrix} \theta(0) \\ \omega(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \pi/8 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{array}{rcl} f : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ \left(t, \begin{bmatrix} \theta \\ \omega \end{bmatrix}\right) & \mapsto & \begin{bmatrix} \omega \\ -\frac{g}{\ell}\sin(\theta) \end{bmatrix} \end{array}$$

Exercice 3.

a. Nous avons

$$\int_{t_n}^{t_{n+1}} y'(t)\mathrm{d}t = y(t_{n+1}) - y(t_n).$$

b. Nous obtenons ainsi

$$y(t_{n+1}) = y(t_n) + \int_{t_n}^{t_{n+1}} y'(t)\mathrm{d}t = y(t_n) + \int_{t_n}^{t_{n+1}} f(t, y(t))\mathrm{d}t.$$

Exercice 4.

a. Nous obtenons

$$\int_{t_n}^{t_{n+1}} f(t, y(t))\mathrm{d}t \approx (t_{n+1} - t_n)\, f(t_n, y(t_n)) = h\, f(t_n, y(t_n)).$$

b. La suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie la récurrence $a_0 = y_0$ et

$$a_{n+1} = a_n + h\, f(t_n, a_n) \quad \text{pour } n \in \mathbb{N}.$$

Exercice 5.

a. Nous obtenons

$$\begin{aligned} \int_{t_n}^{t_{n+1}} f(t, y(t))\mathrm{d}t &\approx (t_{n+1} - t_n)\, f\left(\frac{t_n + t_{n+1}}{2}, y\left(\frac{t_n + t_{n+1}}{2}\right)\right) \\ &\approx h\, f\left(t_n + \frac{h}{2}, y\left(t_n + \frac{h}{2}\right)\right). \end{aligned}$$

b. Nous utilisons l'approximation $y\left(t_n + \frac{h}{2}\right) = y(t_n) + \frac{h}{2}\, f(t_n, y(t_n))$.

c. La suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie la récurrence $a_0 = y_0$ et

$$a_{n+1} = a_n + h\, f\left(t_n + \frac{h}{2}, a_n + \frac{h}{2}\, f(t_n, a_n)\right) \quad \text{pour } n \in \mathbb{N}.$$

Exercice 6.

a. Pour l'exercice **1** nous avons $y_0 = 1$ et $f(t, y) = 2y$. La suite a_n est donc donnée par $a_0 = 1$ et

$$a_{n+1} = a_n + h\, f(t_n, a_n) = a_n + 2h\, a_n = (2h + 1)\, a_n.$$

Pour l'exercice **2** nous avons $y(t) = \begin{bmatrix} \theta(t) \\ \omega(t) \end{bmatrix}$, $y_0 = \begin{bmatrix} \frac{\pi}{8} \\ 0 \end{bmatrix}$ et $f\left(t, \begin{bmatrix} \theta \\ \omega \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} \omega \\ -\frac{g}{\ell}\sin(\theta) \end{bmatrix}$.

La suite a_n est donc donnée par $a_0 = \begin{bmatrix} \frac{\pi}{8} \\ 0 \end{bmatrix}$ et

$$\begin{aligned}
a_{n+1} &= a_n + h\, f(t_n, a_n) \\
&= \begin{bmatrix} a_{n,1} \\ a_{n,2} \end{bmatrix} + h\, f\left(t_n, \begin{bmatrix} a_{n,1} \\ a_{n,2} \end{bmatrix}\right) \\
&= \begin{bmatrix} a_{n,1} \\ a_{n,2} \end{bmatrix} + h\, \begin{bmatrix} a_{n,2} \\ -\frac{g}{\ell}\sin(a_{n,1}) \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} a_{n,1} + h a_{n,2} \\ a_{n,2} - \frac{g}{\ell}\sin(a_{n,1}) \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

b. Pour l'exercice **1** nous obtenons $a_0 = 1$ ainsi que

$$\begin{aligned}
a_{n+1} &= a_n + h\, f\left(t_n + \frac{h}{2}, a_n + \frac{h}{2} f(t_n, a_n)\right) \\
&= a_n + h\, f\left(t_n + \frac{h}{2}, a_n + \frac{h}{2} 2a_n\right) \\
&= a_n + h\, f\left(t_n + \frac{h}{2}, (h+1)a_n\right) \\
&= a_n + 2\, h\, (h+1)a_n \\
&= (2h^2 + 2h + 1)a_n.
\end{aligned}$$

Pour l'exercice **2** nous obtenons $a_0 = \begin{bmatrix} \frac{\pi}{8} \\ 0 \end{bmatrix}$ ainsi que

$$\begin{aligned}
a_{n+1} &= a_n + h\, f\left(t_n + \frac{h}{2}, a_n + \frac{h}{2} f(t_n, a_n)\right) \\
&= \begin{bmatrix} a_{n,1} \\ a_{n,2} \end{bmatrix} + h\, f\left(t_n + \frac{h}{2}, \begin{bmatrix} a_{n,1} \\ a_{n,2} \end{bmatrix} + \frac{h}{2} f\left(t_n, \begin{bmatrix} a_{n,1} \\ a_{n,2} \end{bmatrix}\right)\right) \\
&= \begin{bmatrix} a_{n,1} \\ a_{n,2} \end{bmatrix} + h\, f\left(t_n + \frac{h}{2}, \begin{bmatrix} a_{n,1} \\ a_{n,2} \end{bmatrix} + \frac{h}{2} \begin{bmatrix} a_{n,2} \\ -\frac{g}{\ell}\sin(a_{n,1}) \end{bmatrix}\right) \\
&= \begin{bmatrix} a_{n,1} \\ a_{n,2} \end{bmatrix} + h\, f\left(t_n + \frac{h}{2}, \begin{bmatrix} a_{n,1} + \frac{h}{2}\, a_{n,2} \\ a_{n,2} - \frac{g\, h}{2\,\ell}\sin(a_{n,1}) \end{bmatrix}\right) \\
&= \begin{bmatrix} a_{n,1} \\ a_{n,2} \end{bmatrix} + h \begin{bmatrix} a_{n,2} - \frac{g\, h}{2\ell}\, \sin(a_{n,1}) \\ -\frac{g}{\ell}\sin\left(a_{n,1} + \frac{h}{2}\, a_{n,2}\right) \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} a_{n,1} + h\, a_{n,2} - \frac{g\, h^2}{2\ell}\, \sin(a_{n,1}) \\ a_{n,2} - \frac{g\, h}{\ell}\sin\left(a_{n,1} + \frac{h}{2}\, a_{n,2}\right) \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$