La forme normale tournante

Jean Fromentin

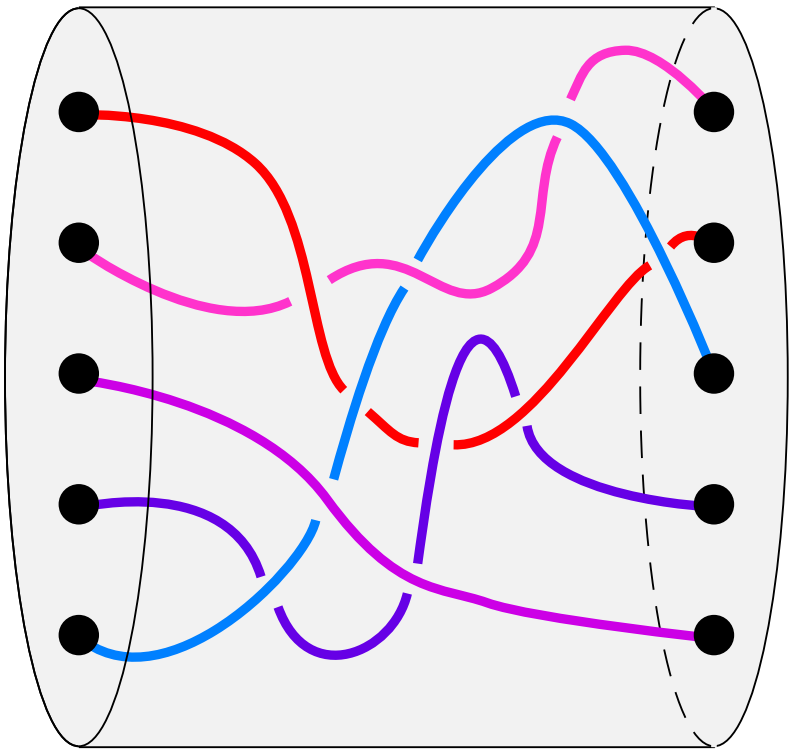
Laboratoire GREYC
Université de Caen

Tresses géométriques

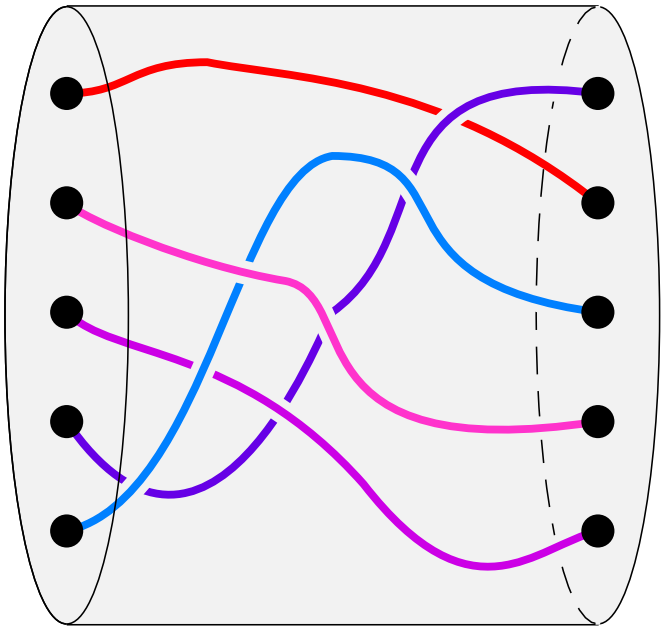
Une tresse, c'est :

Tresses géométriques

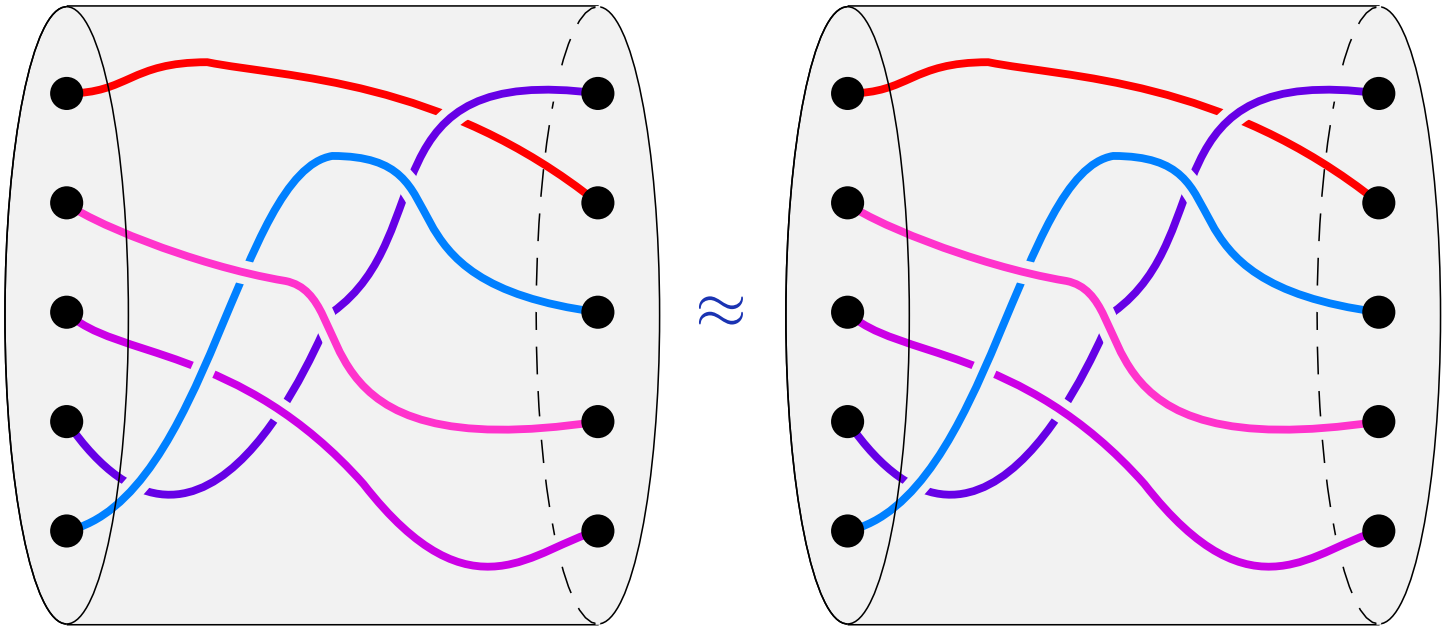
Une tresse, c'est :



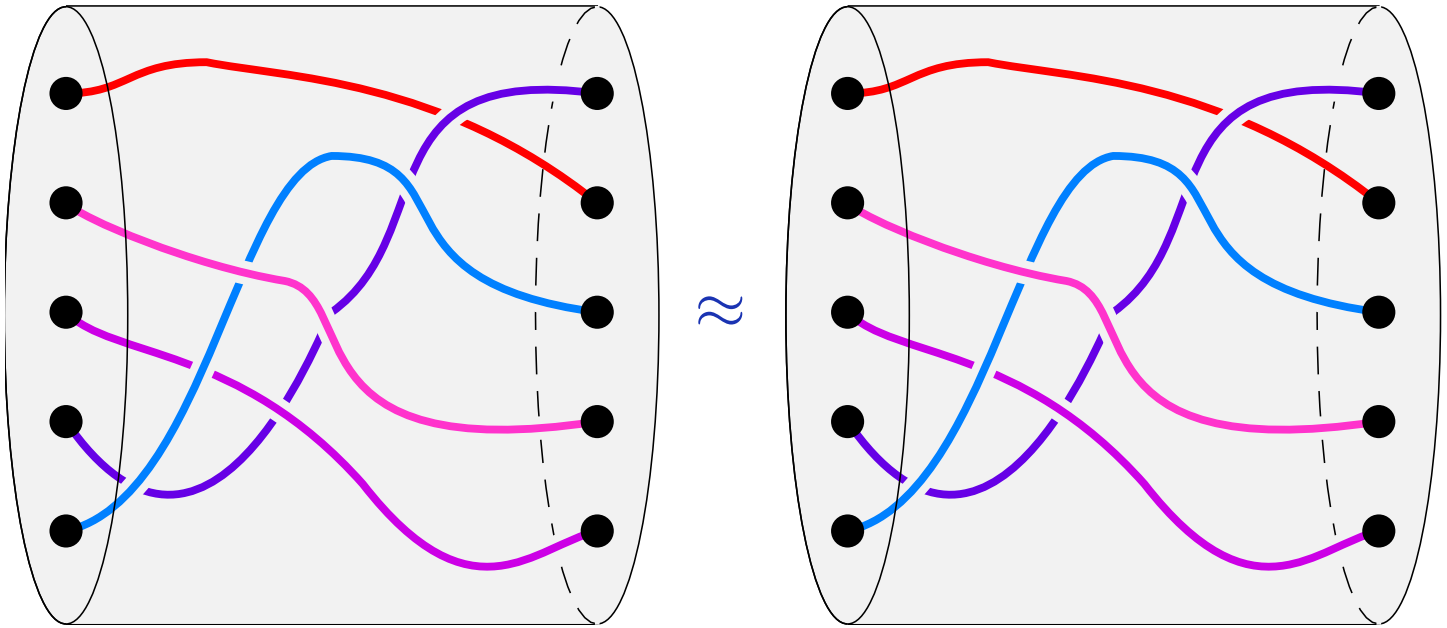
Isotopie



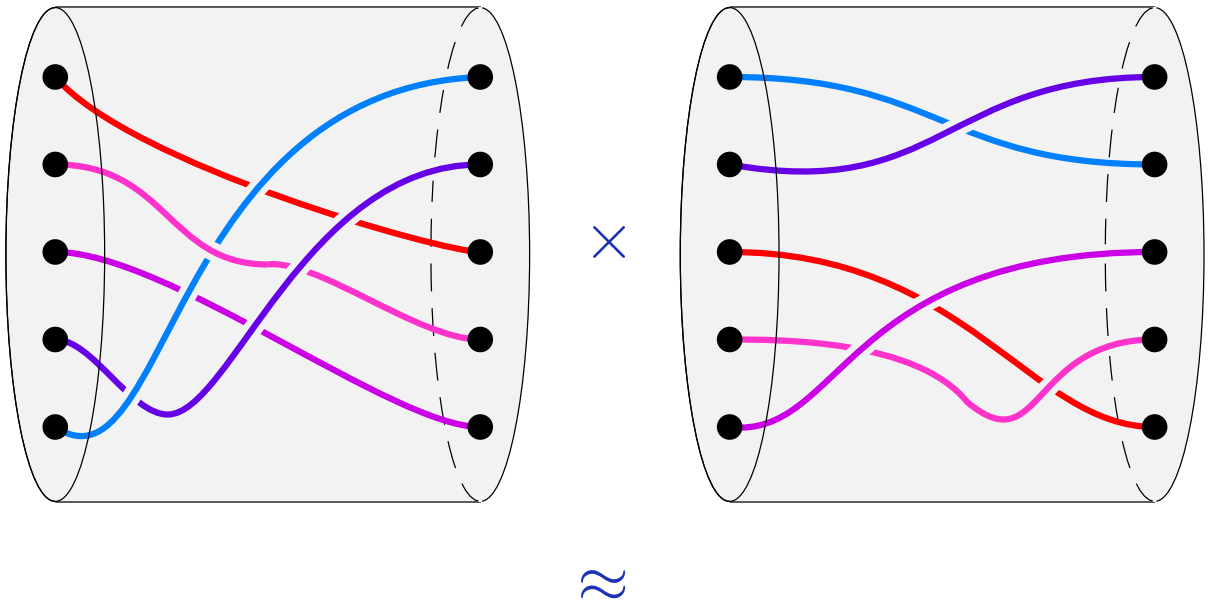
Isotopie



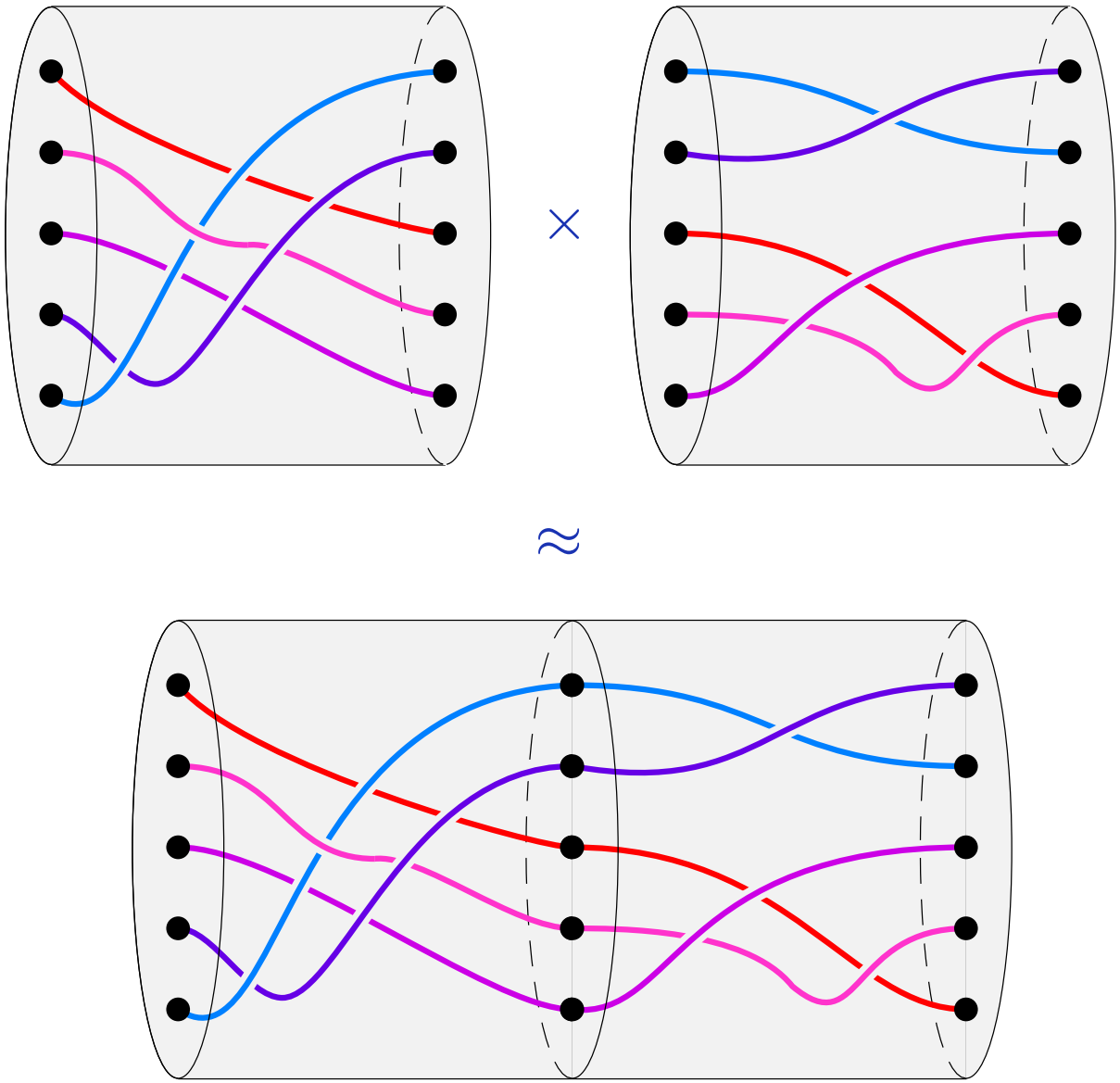
Isotopie



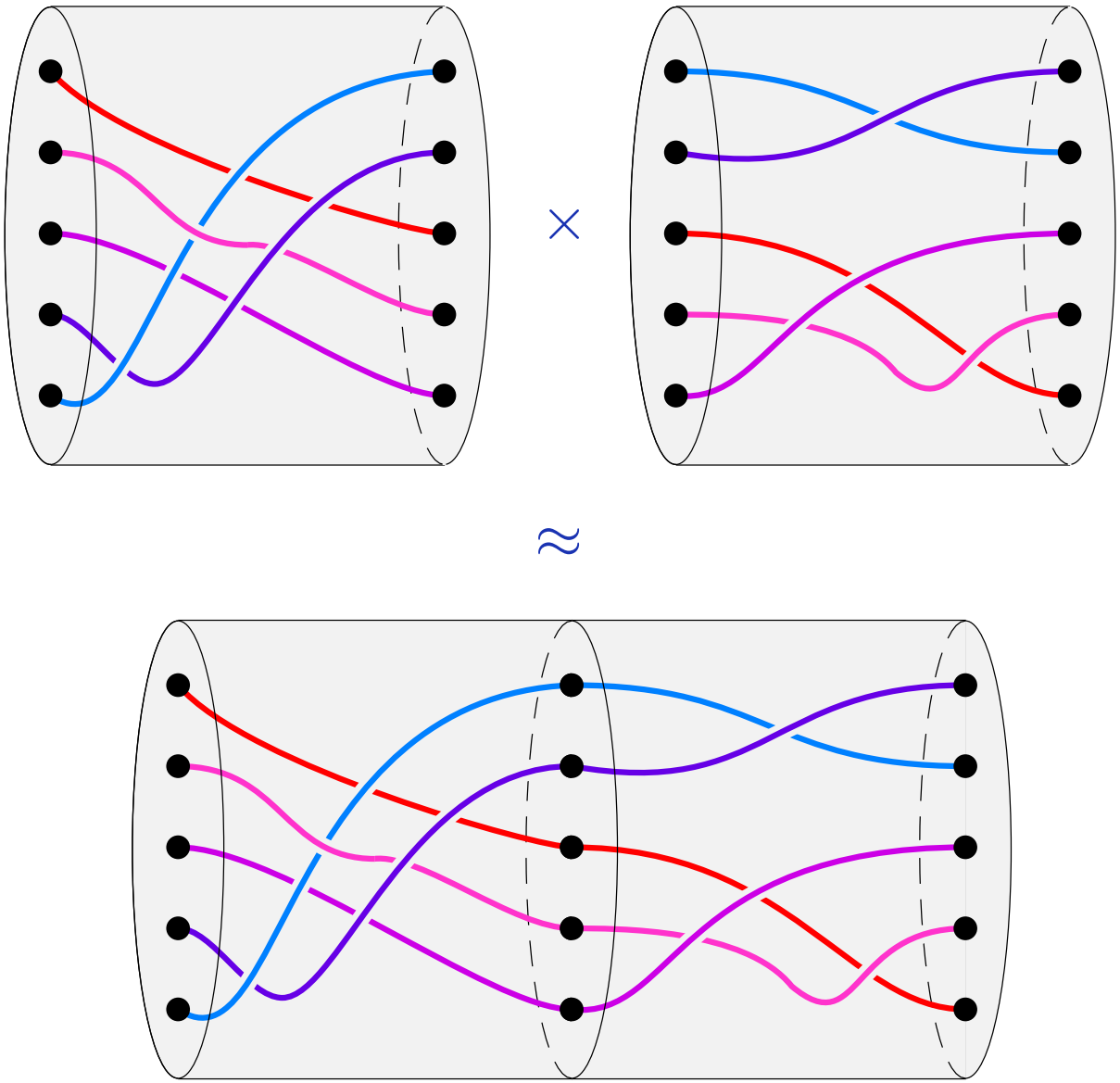
Mulitplication de tresses



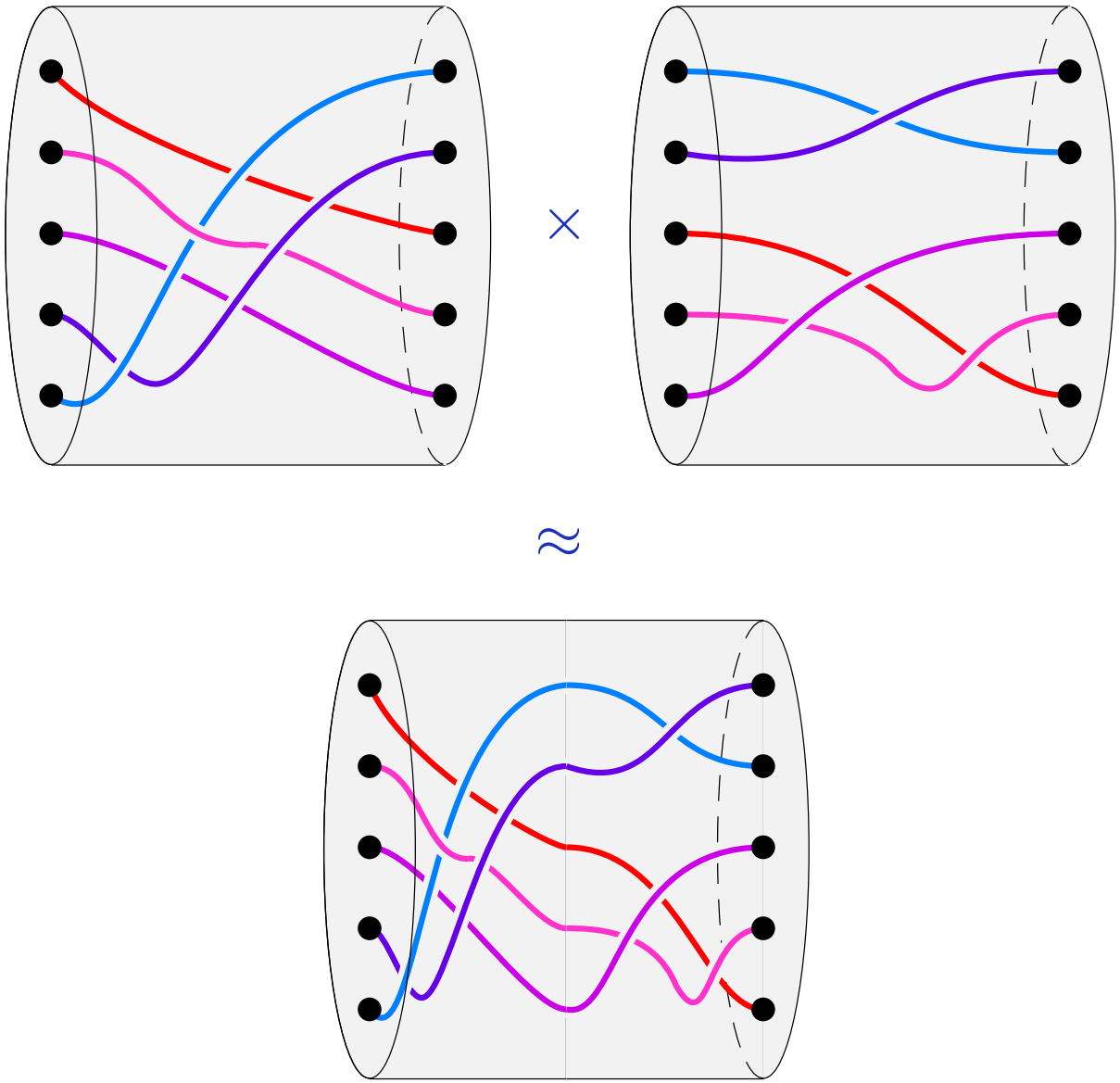
Mulitplication de tresses



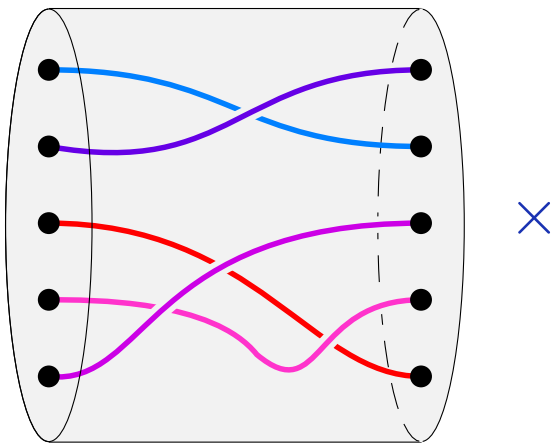
Mulitplication de tresses



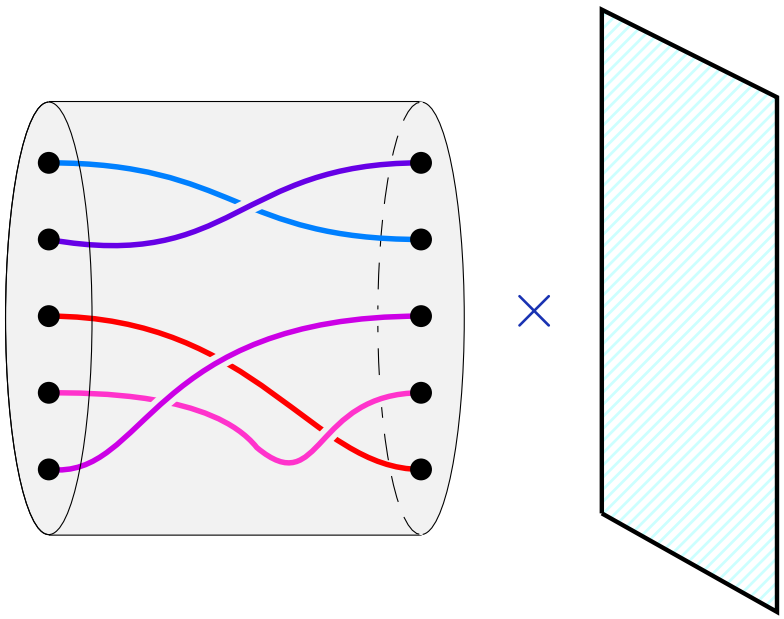
Mulitplication de tresses



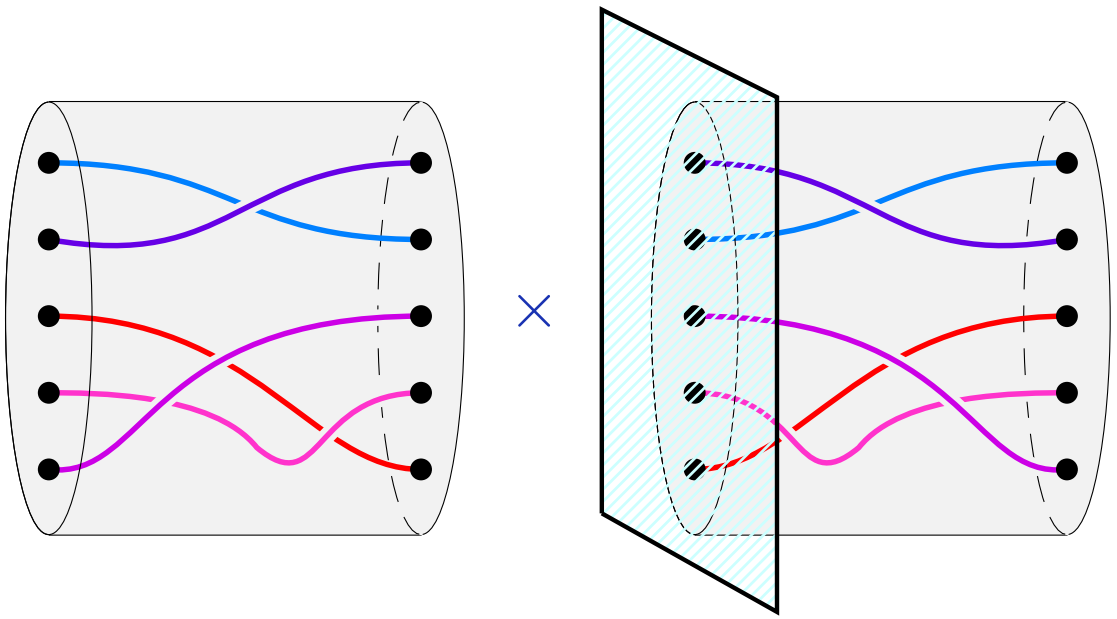
Inverse d'une tresse



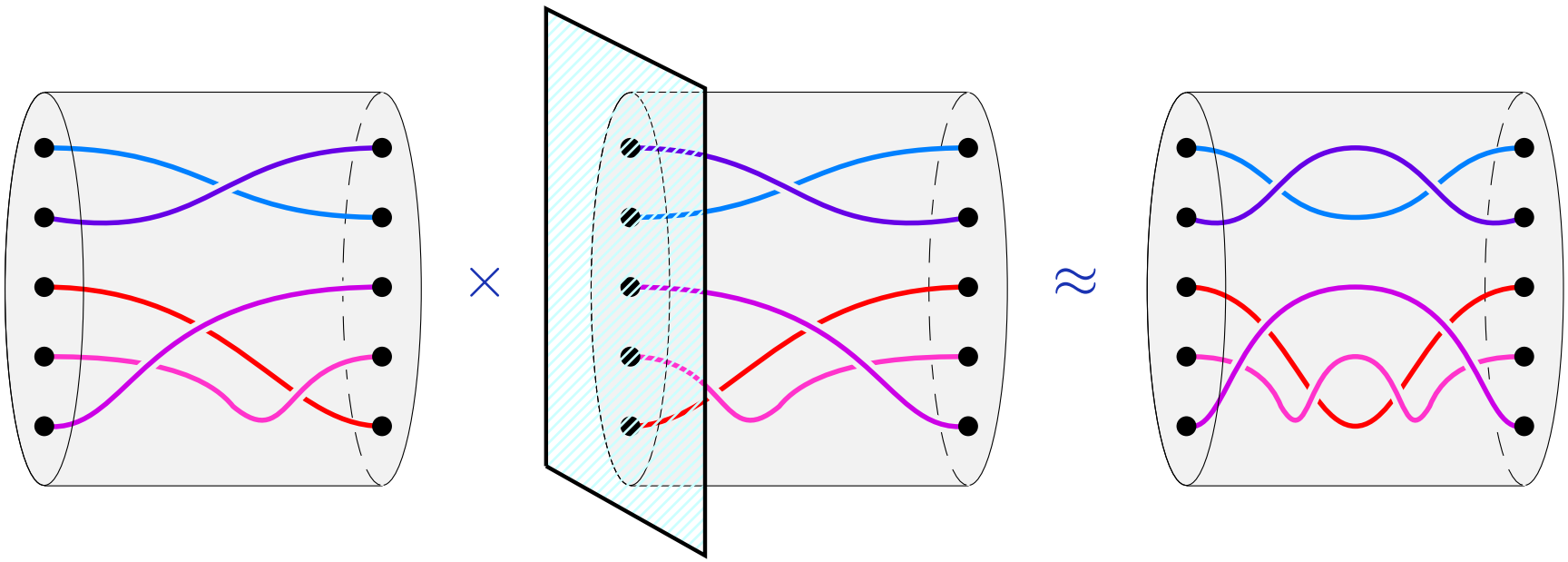
Inverse d'une tresse



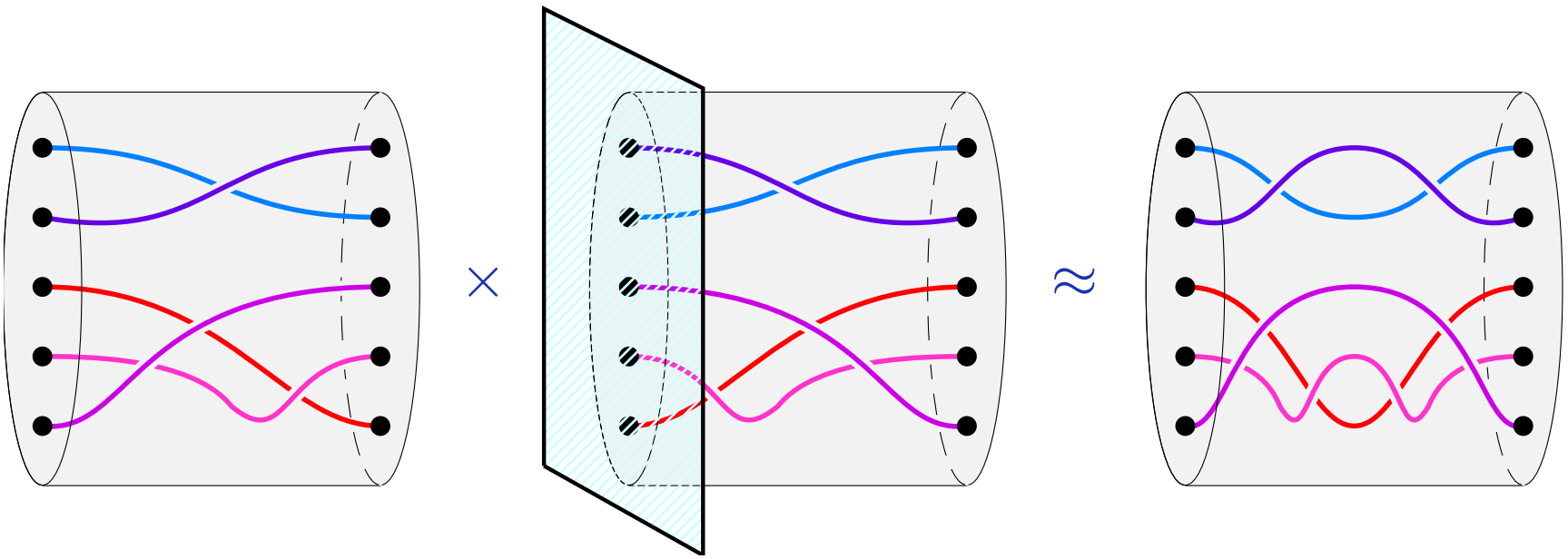
Inverse d'une tresse



Inverse d'une tresse

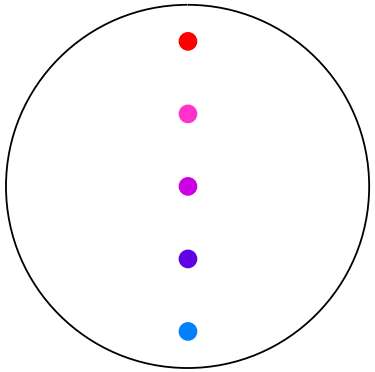


Inverse d'une tresse



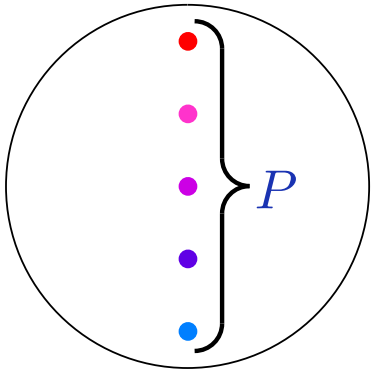
Groupe de difféotopie du disque troué

- On note D_n le disque à n-trous



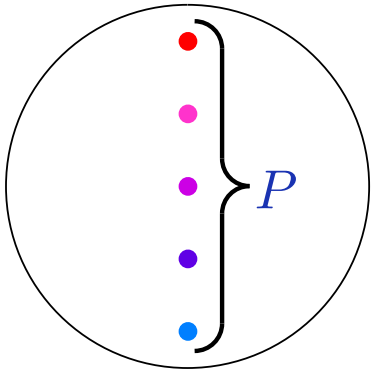
Groupe de difféotopie du disque troué

- On note D_n le disque à n-trous



Groupe de difféotopie du disque troué

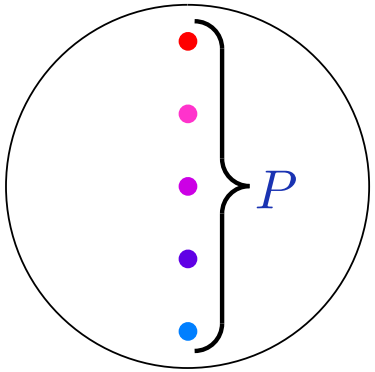
- On note D_n le disque à n-trous



- $\mathcal{MCG}(D_n) = \{\, \varphi \in \mathrm{Homeo}^+(D_n)$ tq $\varphi|_{\partial D_n} = \mathrm{id}$ et $\varphi(P) = P \,\}$

Groupe de difféotopie du disque troué

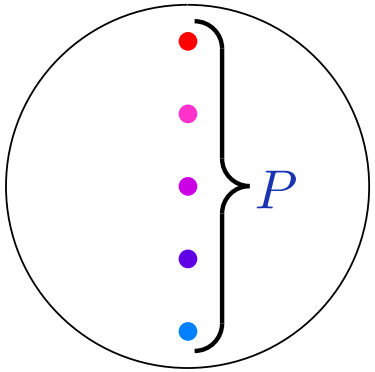
- On note D_n le disque à n-trous



- $\mathcal{MCG}(D_n) = \{\, \varphi \in \mathrm{Homeo}^+(D_n)$ tq $\varphi|_{\partial D_n} = \mathrm{id}$ et $\varphi(P) = P \,\}/\sim$

Groupe de difféotopie du disque troué

- On note D_n le disque à n-trous

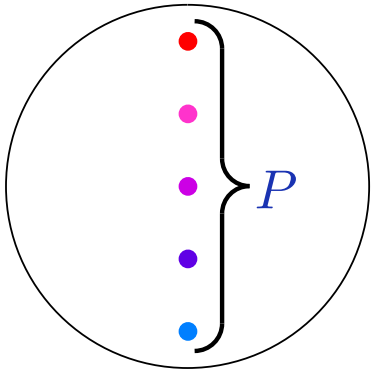


- $\mathcal{MCG}(D_n) = \{\, \varphi \in \mathrm{Homeo}^+(D_n)$ tq $\varphi|_{\partial D_n} = \mathrm{id}$ et $\varphi(P) = P \,\}/\sim$

  $\rightsquigarrow$ film du mouvement de n points dans le disque

Groupe de difféotopie du disque troué

- On note D_n le disque à n-trous



- $\mathcal{MCG}(D_n) = \{\, \varphi \in \mathrm{Homeo}^+(D_n)$ tq $\varphi|_{\partial D_n} = \mathrm{id}$ et $\varphi(P) = P \,\}/\sim$

  $\rightsquigarrow$ film du mouvement de n points dans le disque

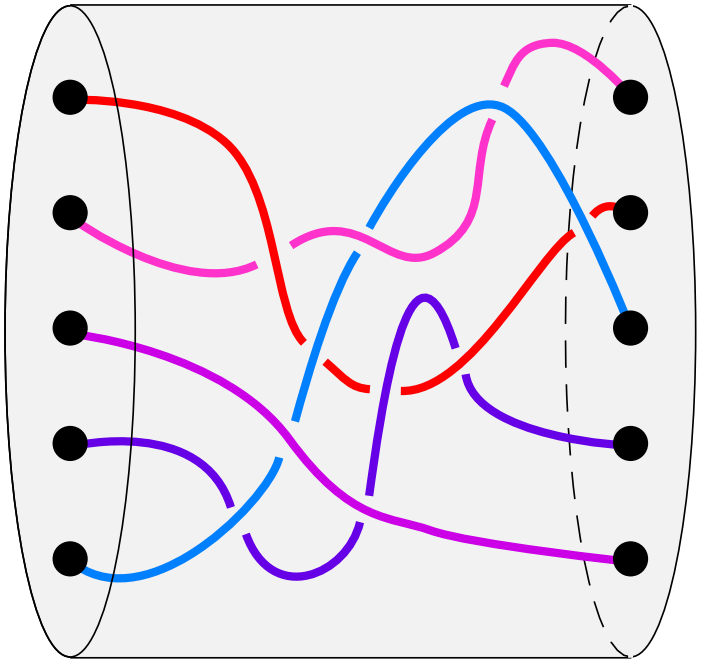
Tresses et groupe de difféotopie

- Une tresse à n-brins $\approx$ un élément de $\mathcal{MCG}(D_n)$.

Tresses et groupe de difféotopie

- Une tresse à n-brins $\approx$ un élément de $\mathcal{MCG}(D_n)$.

Diagramme de tresses



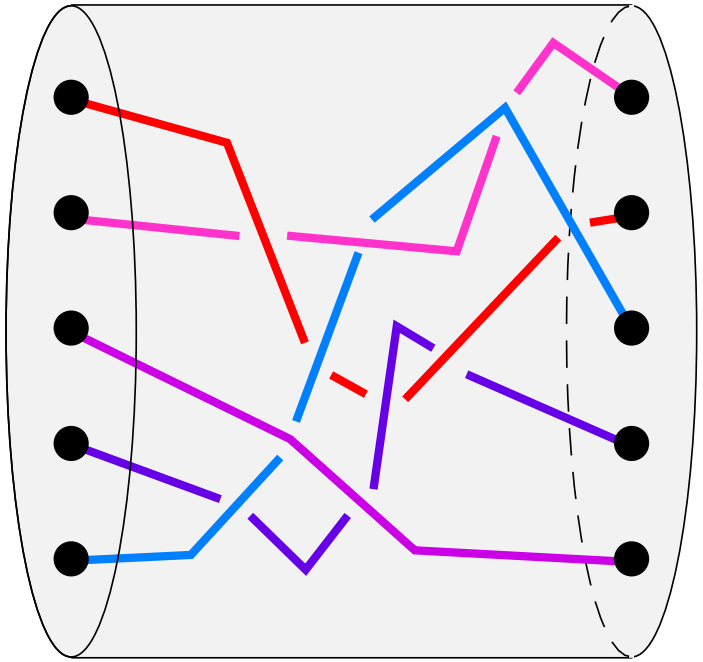
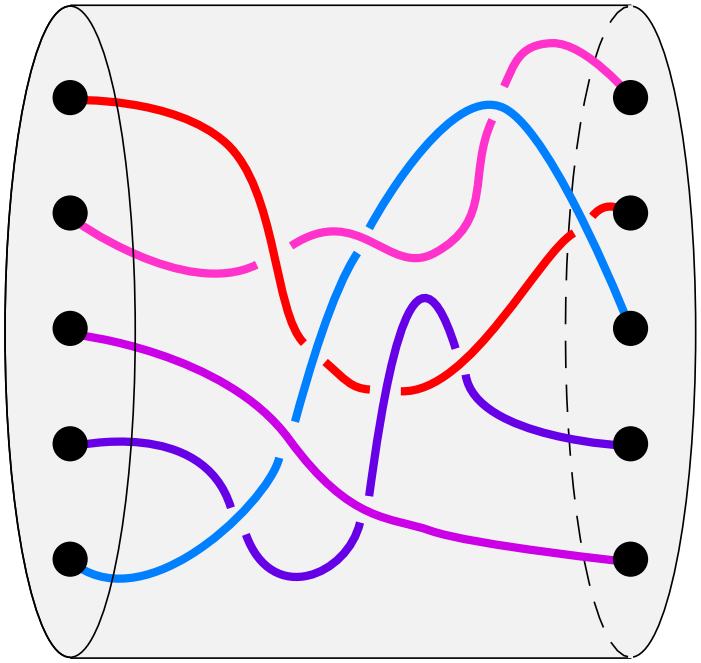


Diagramme de tresses



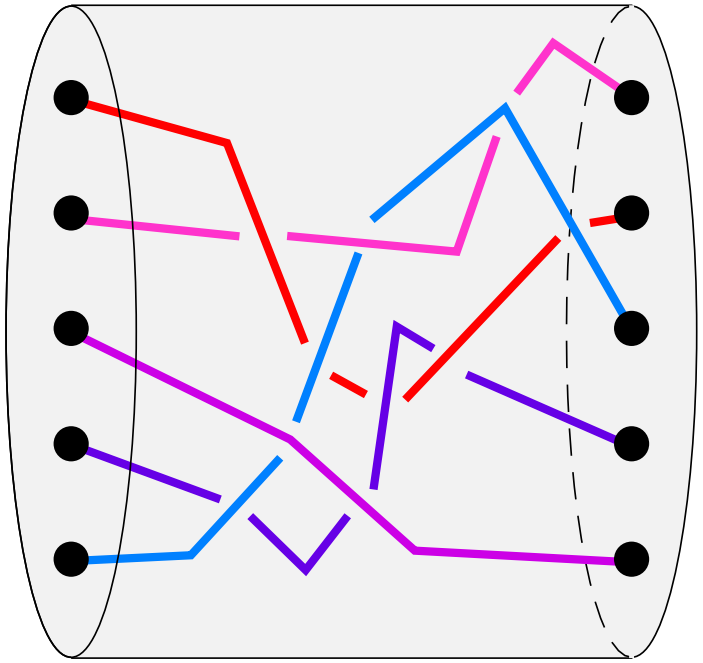
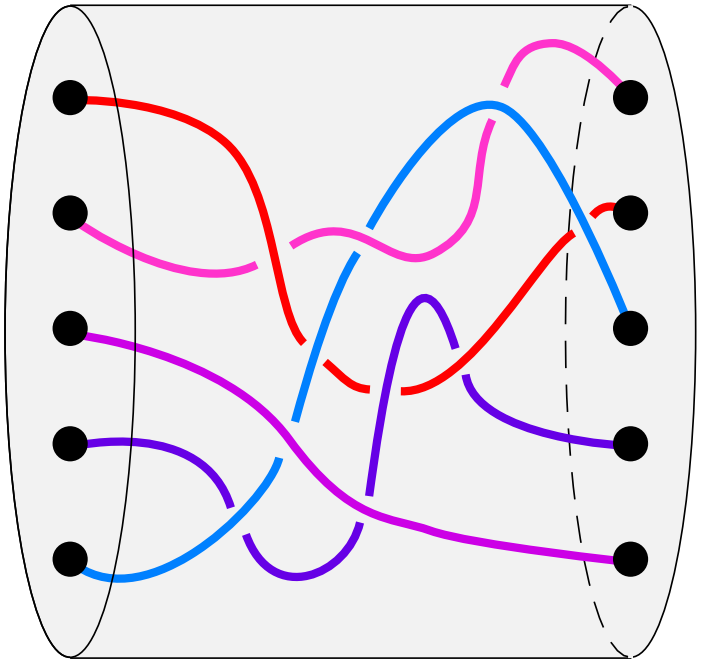


Diagramme de tresses



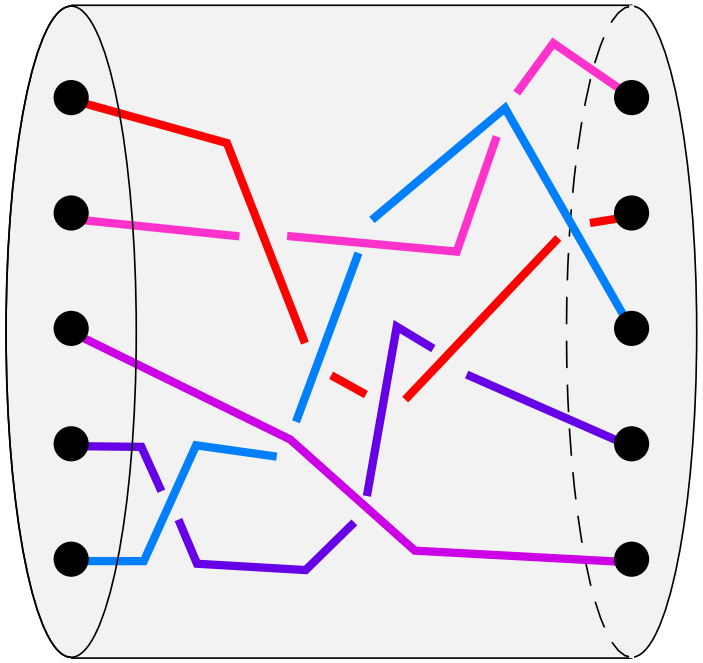
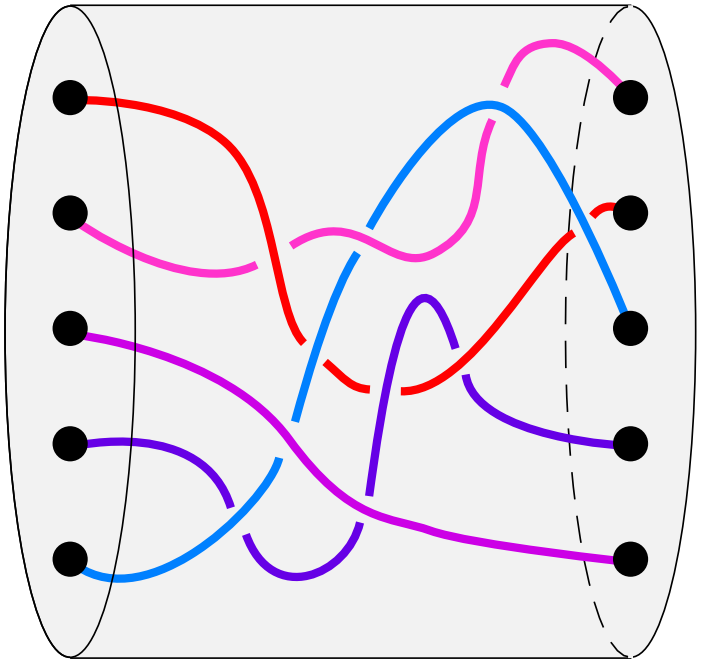


Diagramme de tresses



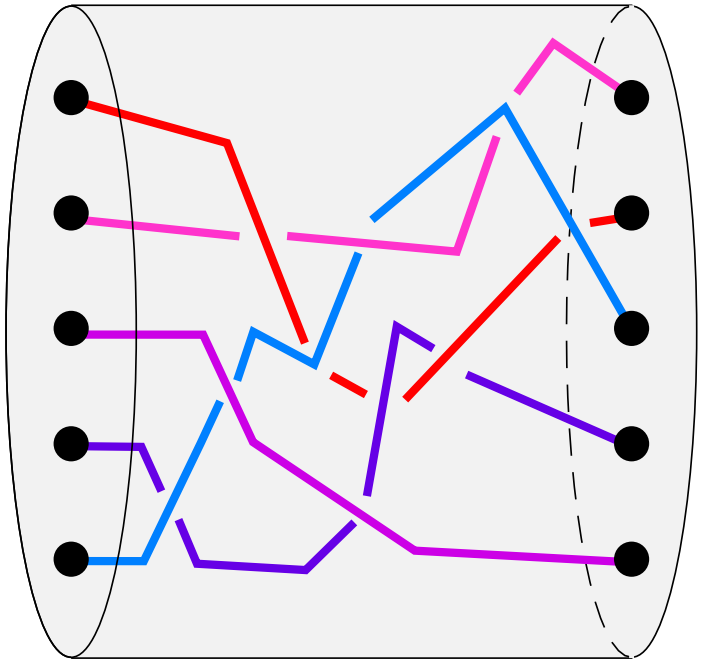
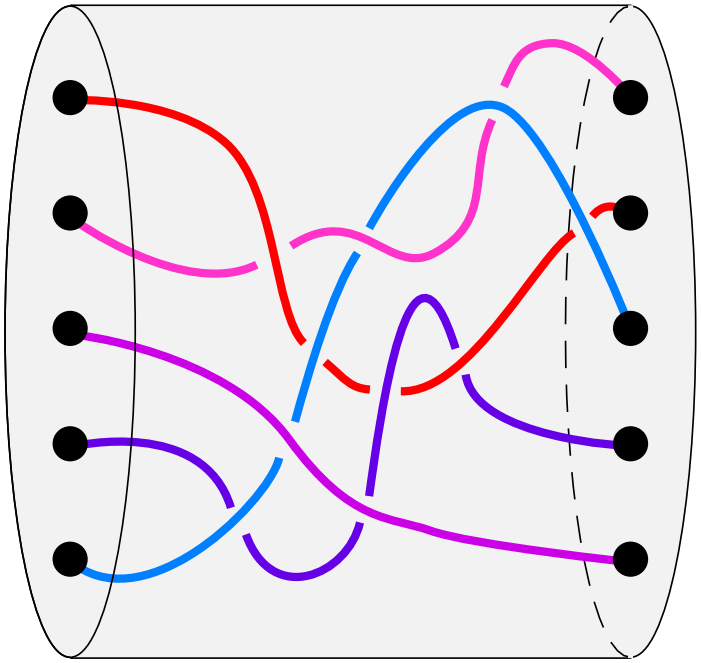


Diagramme de tresses



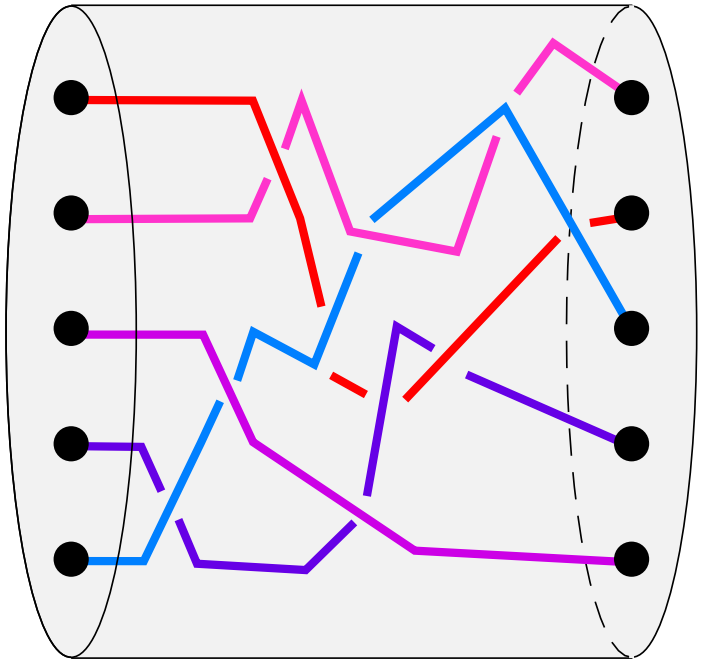
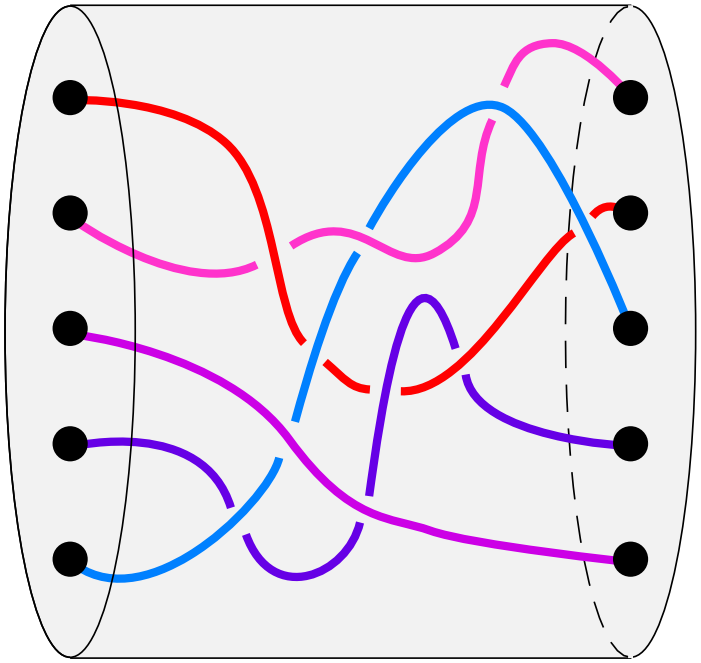


Diagramme de tresses



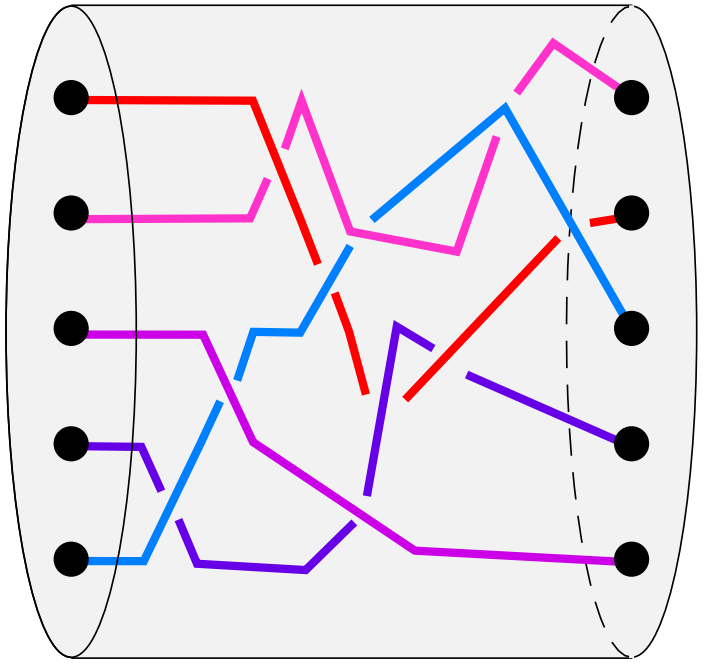
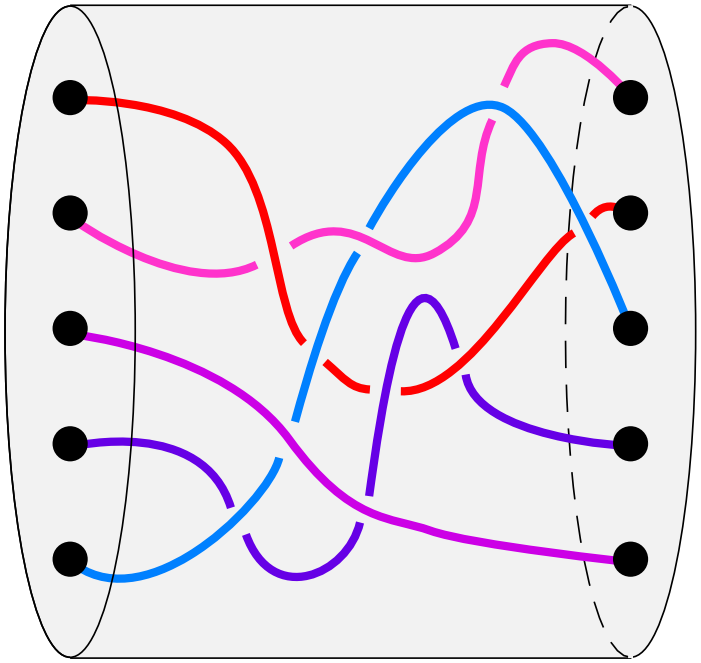


Diagramme de tresses



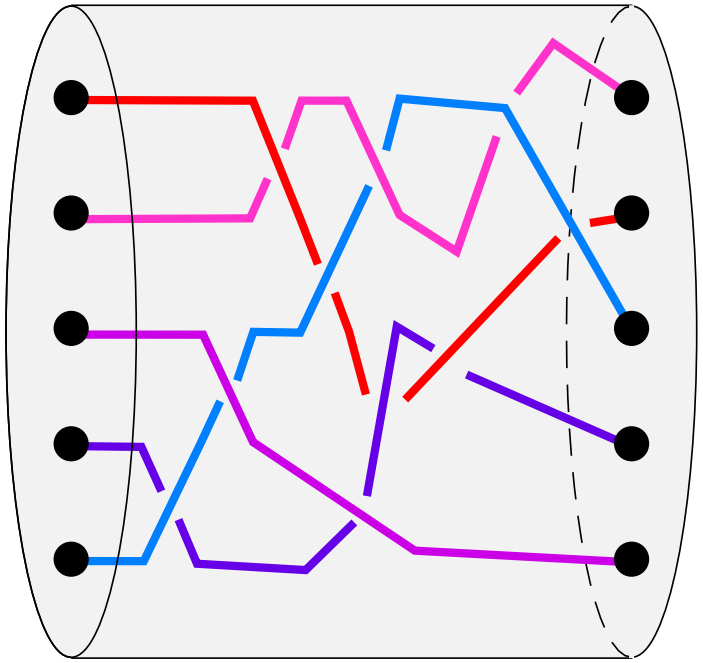
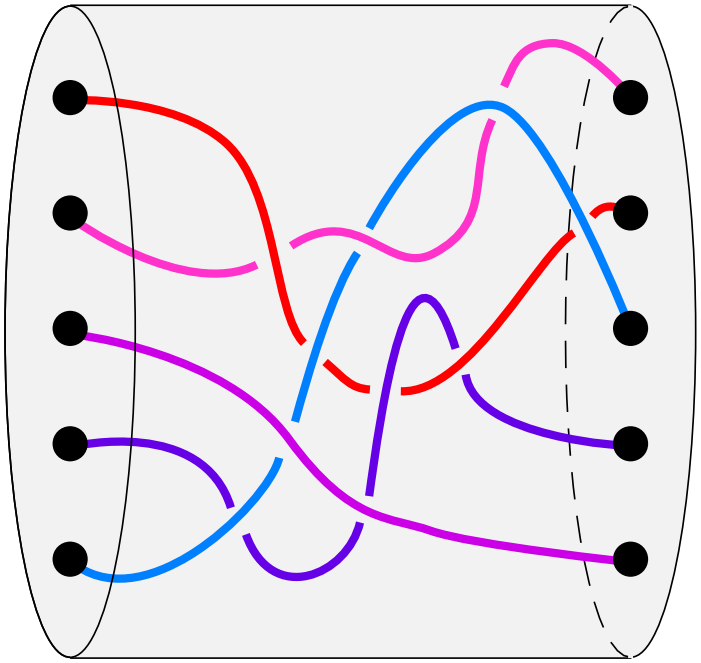


Diagramme de tresses



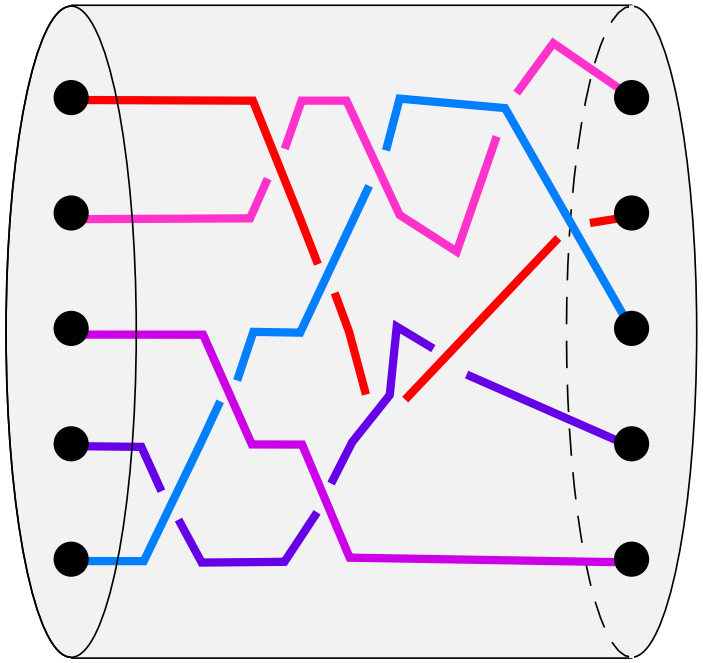
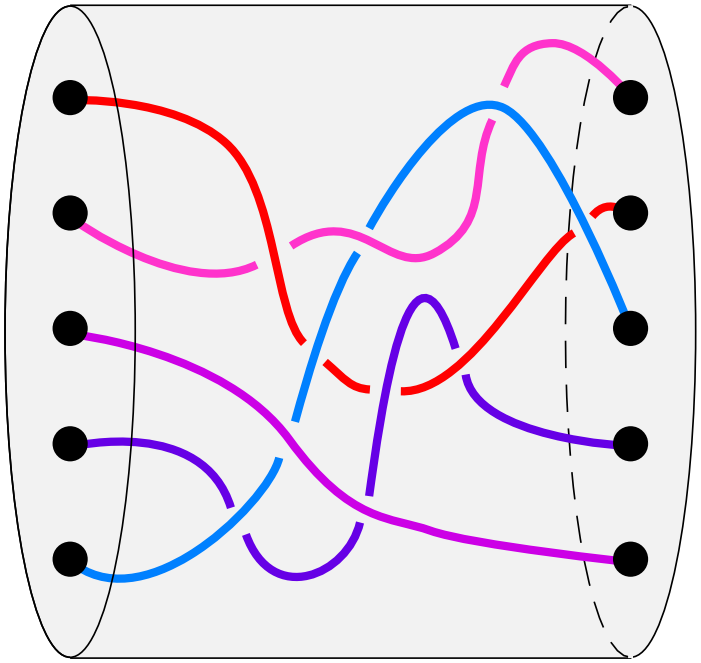


Diagramme de tresses



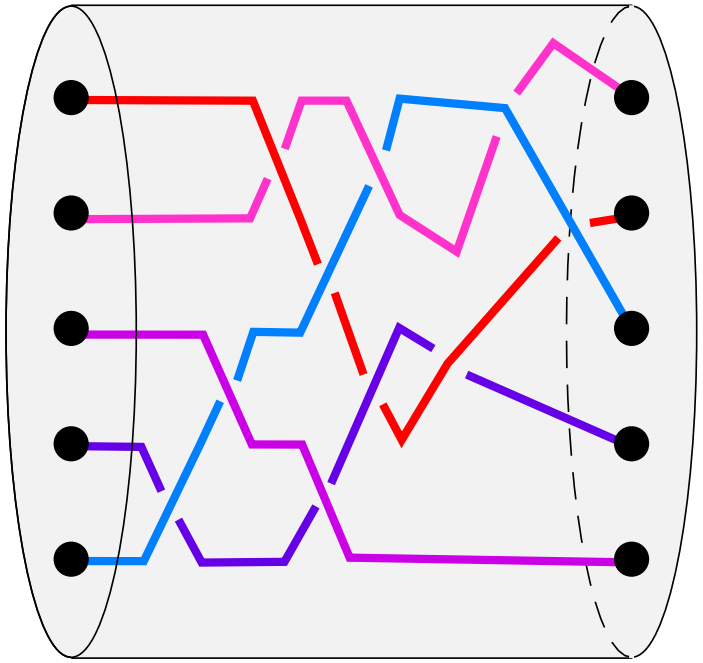
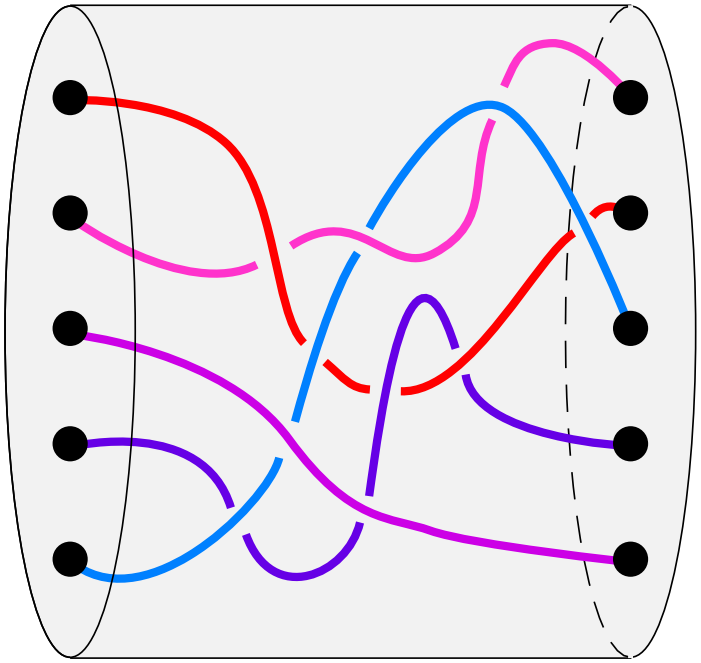


Diagramme de tresses



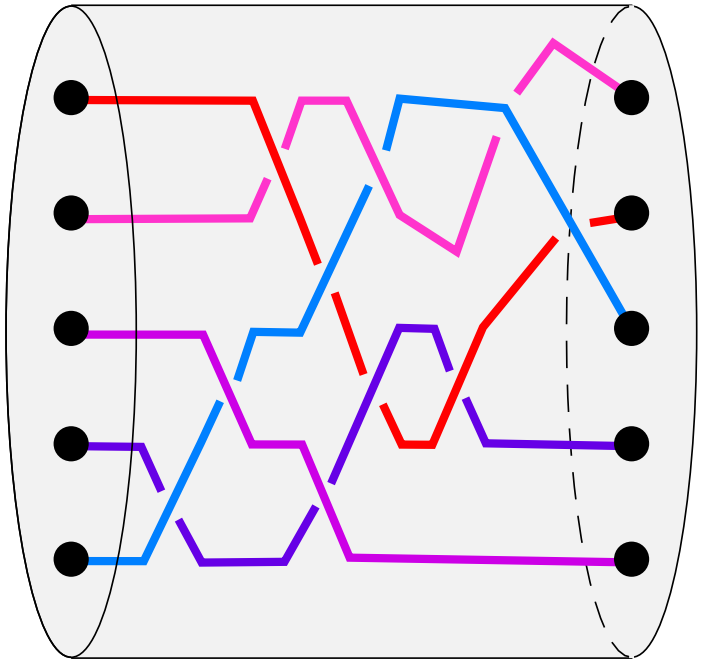
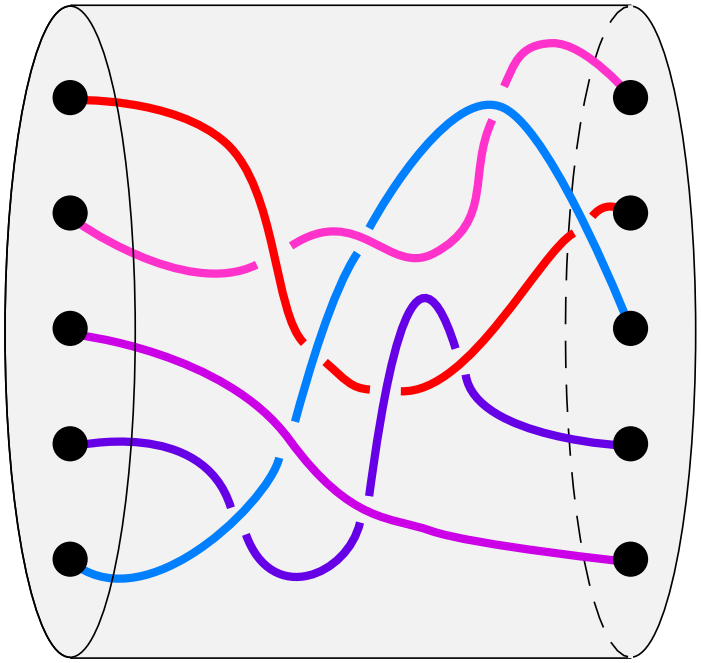


Diagramme de tresses



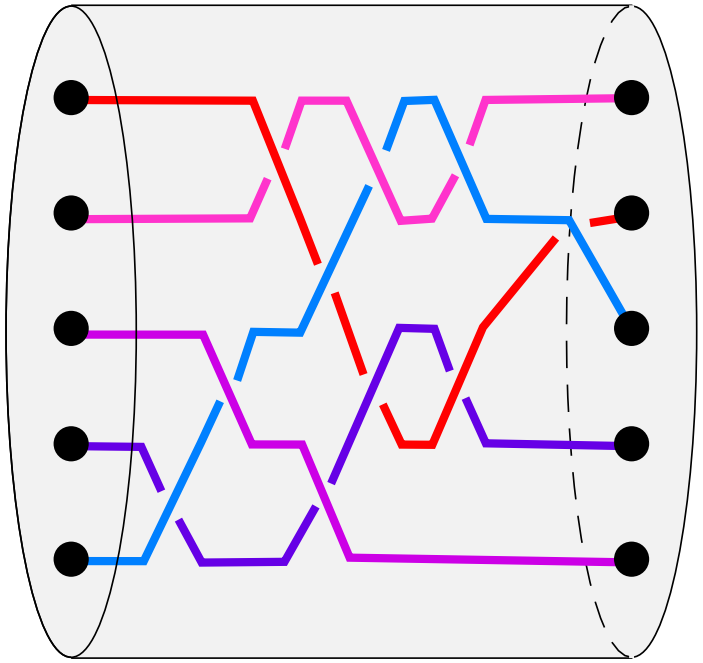
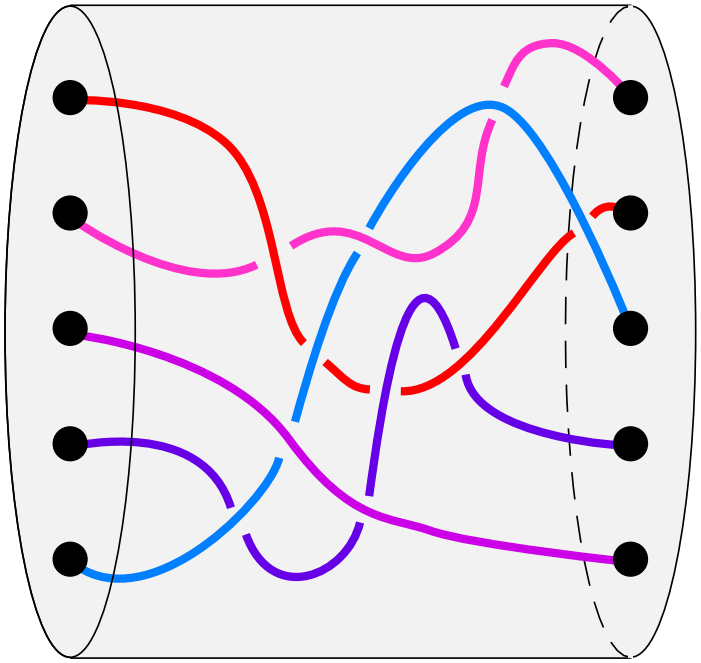


Diagramme de tresses



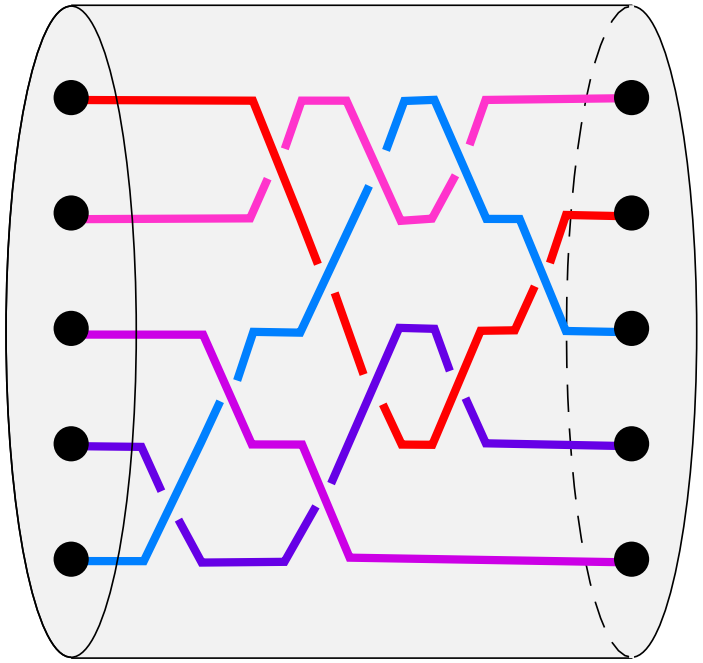
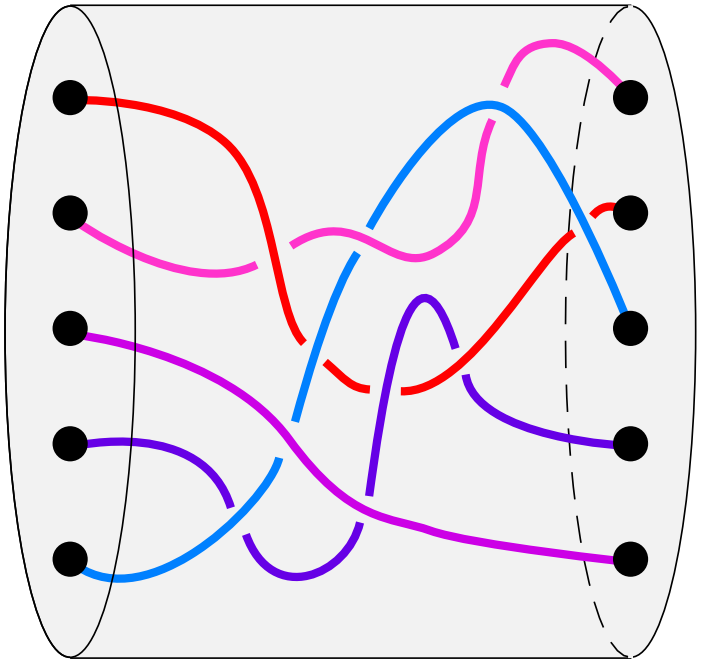


Diagramme de tresses



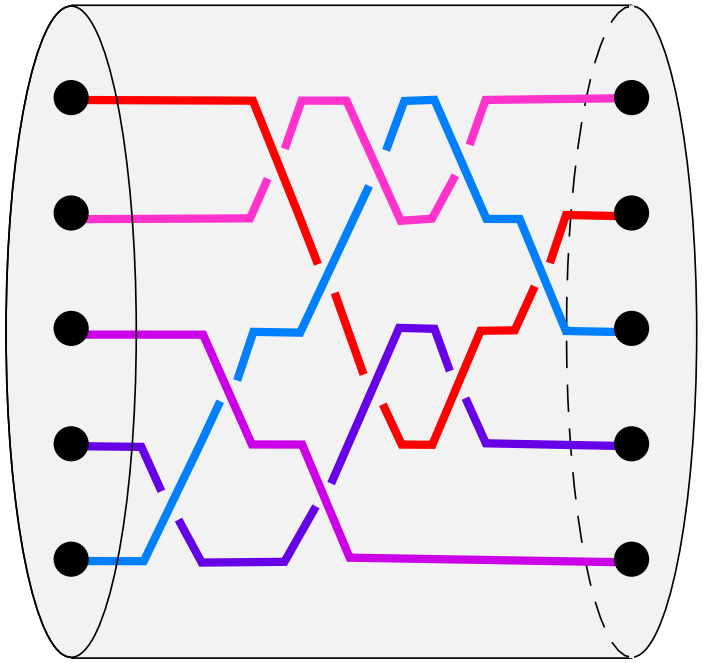
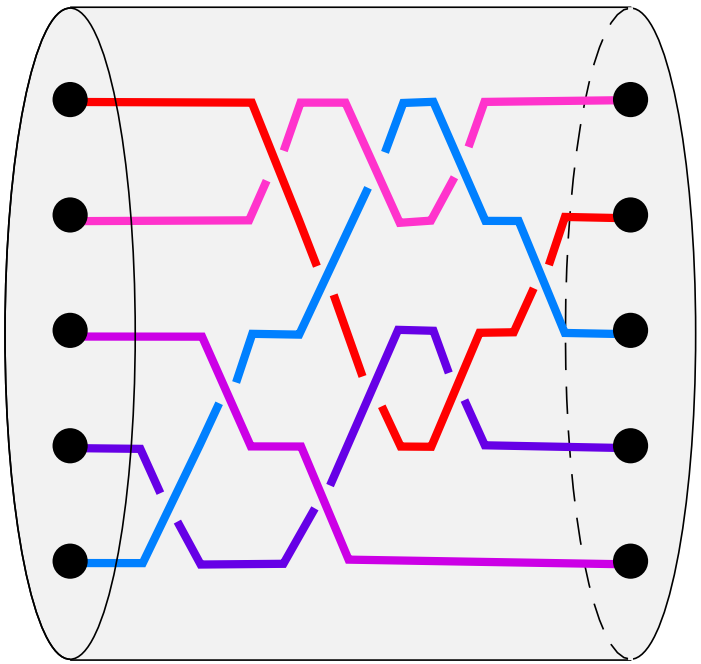


Diagramme de tresses



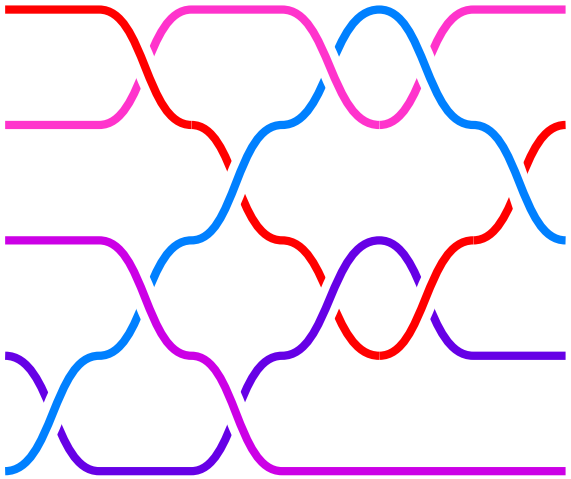
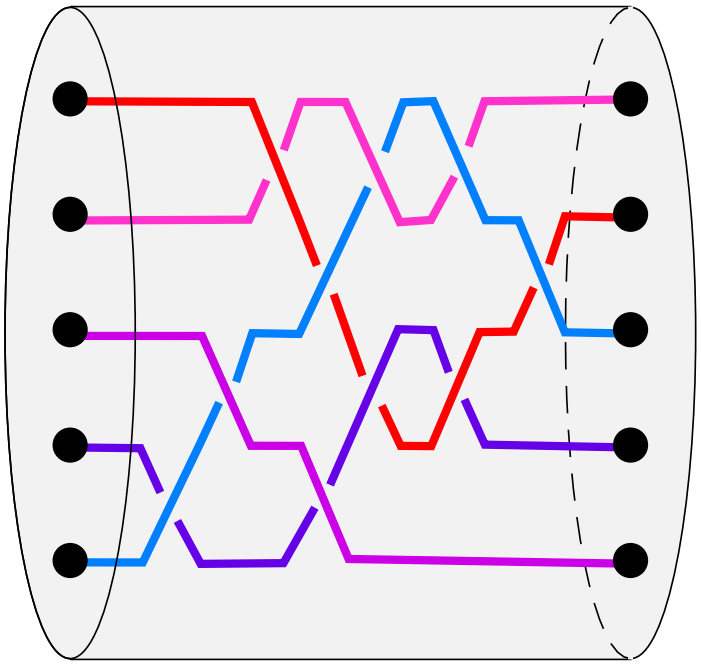


Diagramme de tresses



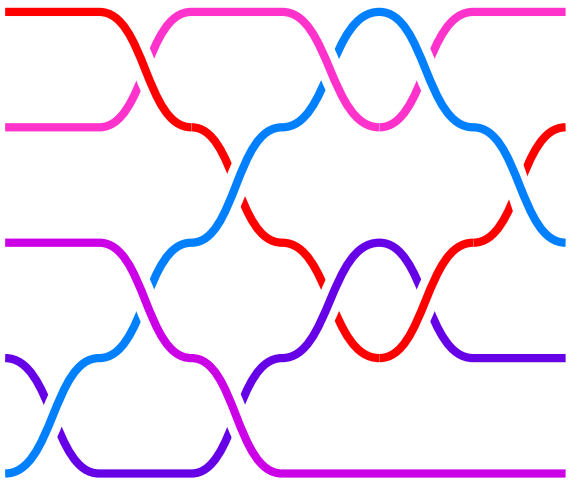
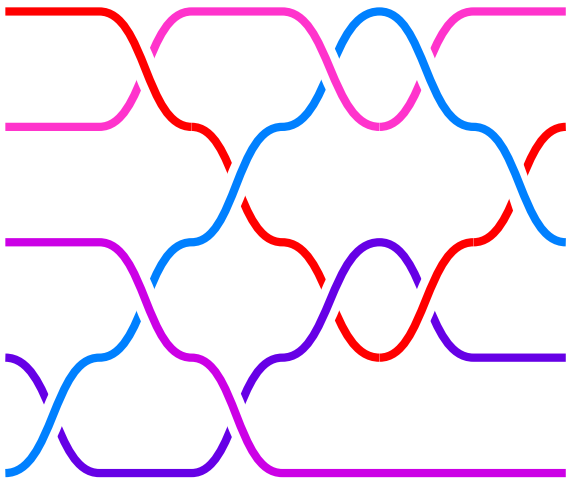


Diagramme de tresses



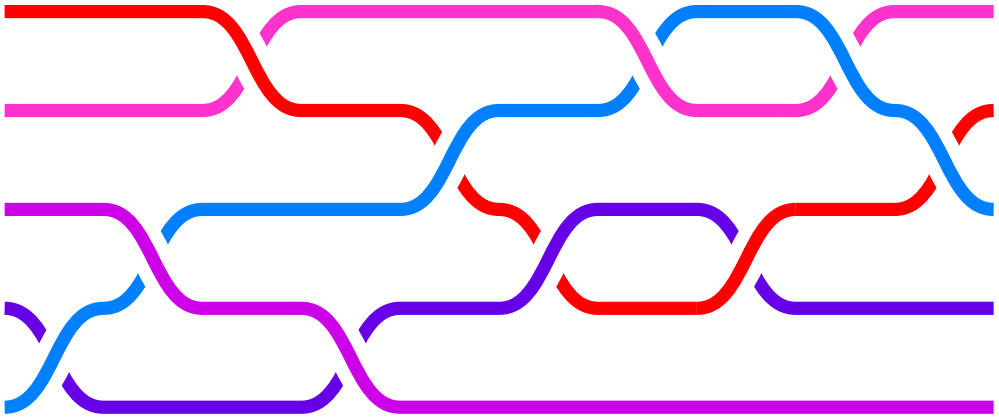
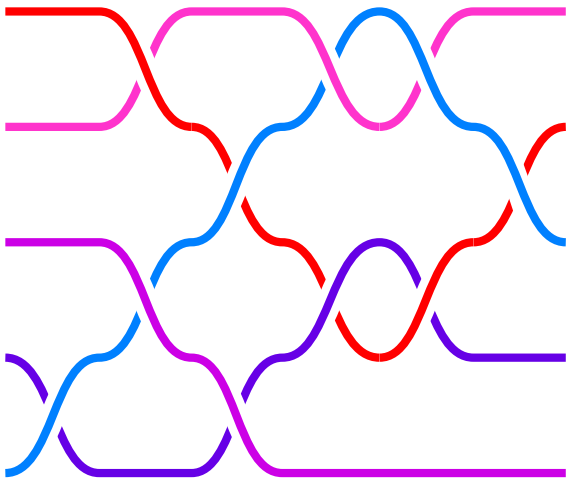


Diagramme de tresses



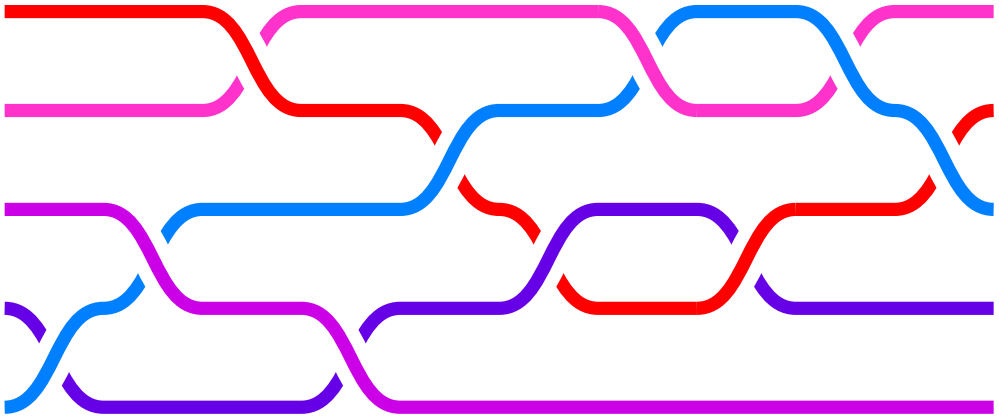
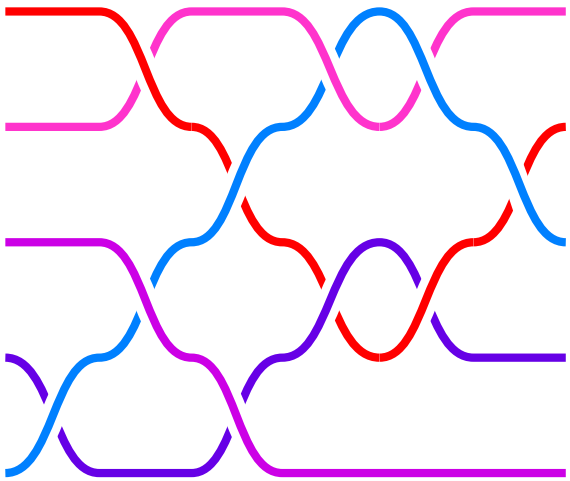


Diagramme de tresses



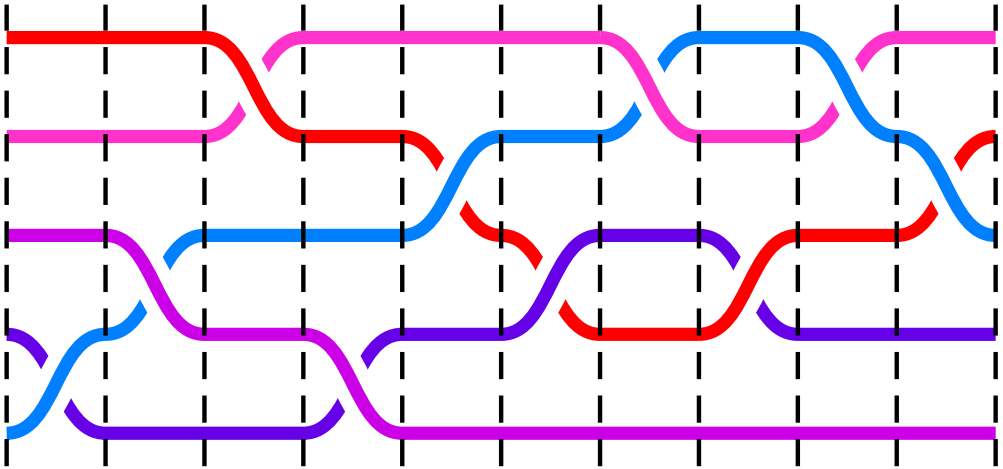
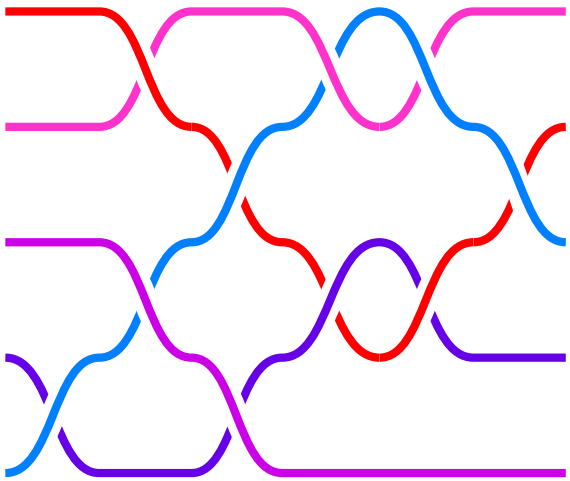
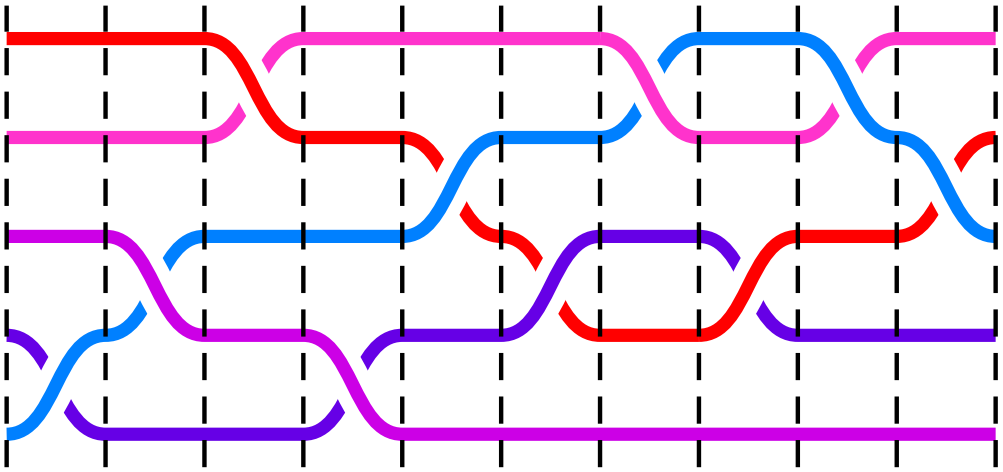


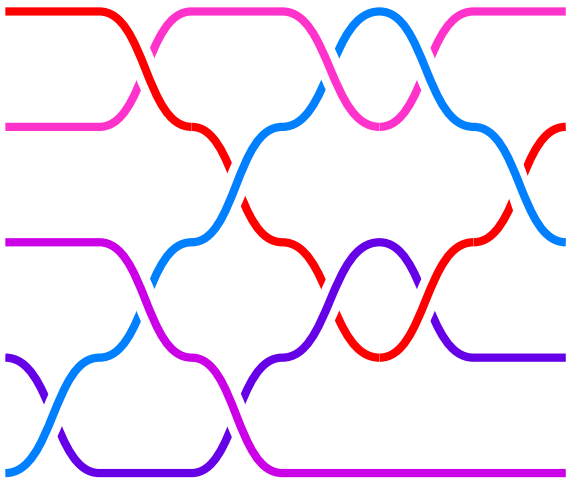
Diagramme de tresses





σ_1

Diagramme de tresses



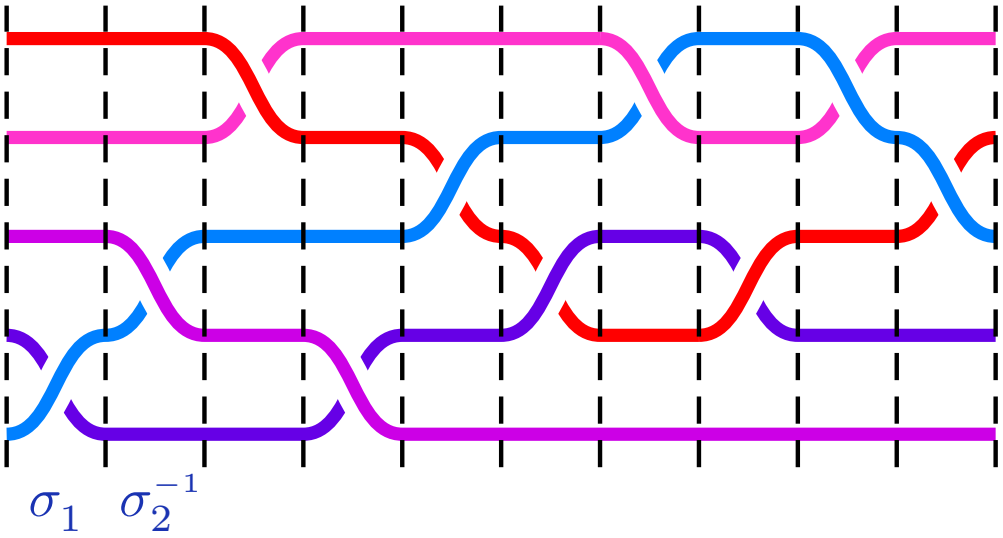
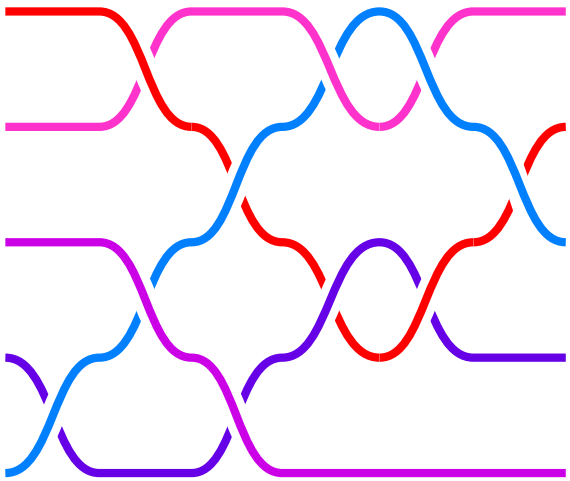


Diagramme de tresses



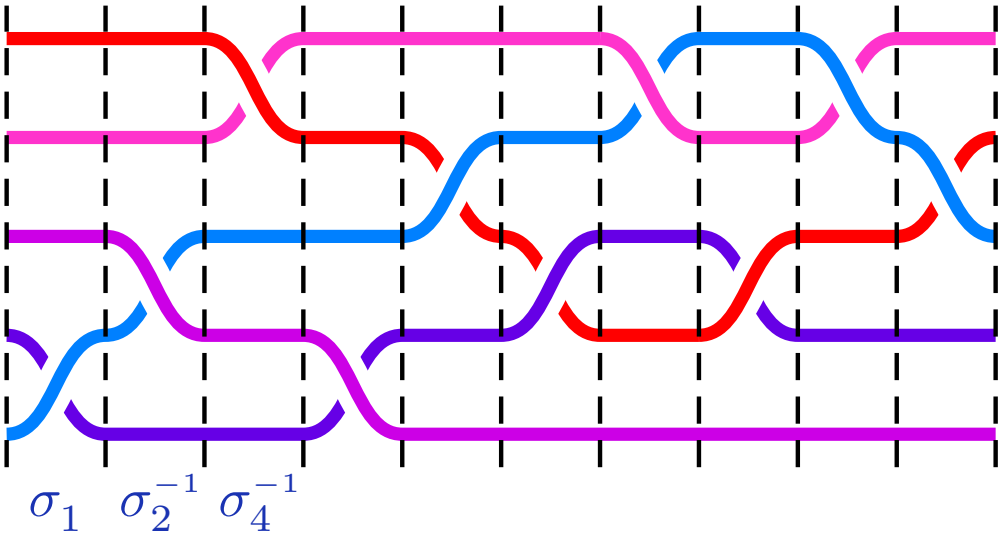
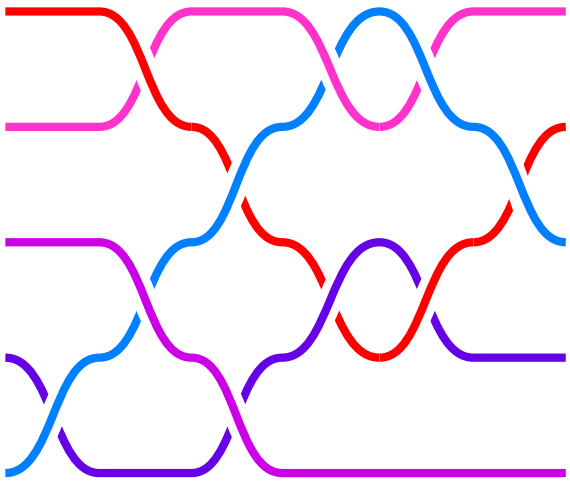


Diagramme de tresses



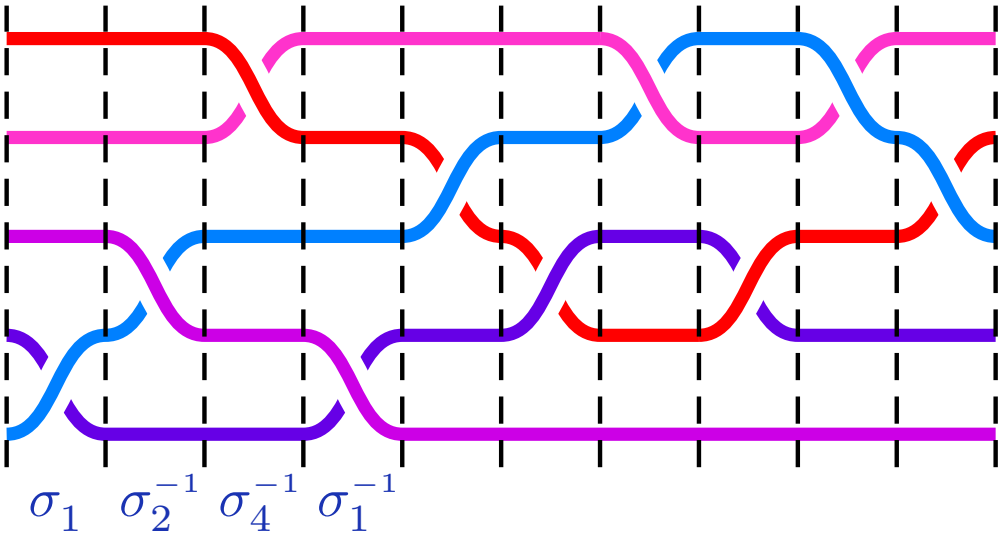
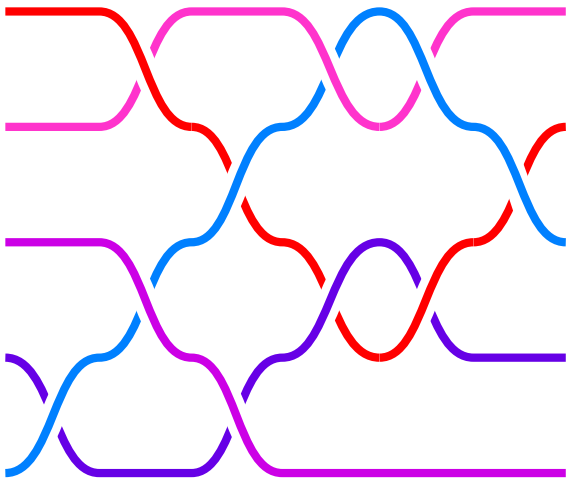


Diagramme de tresses



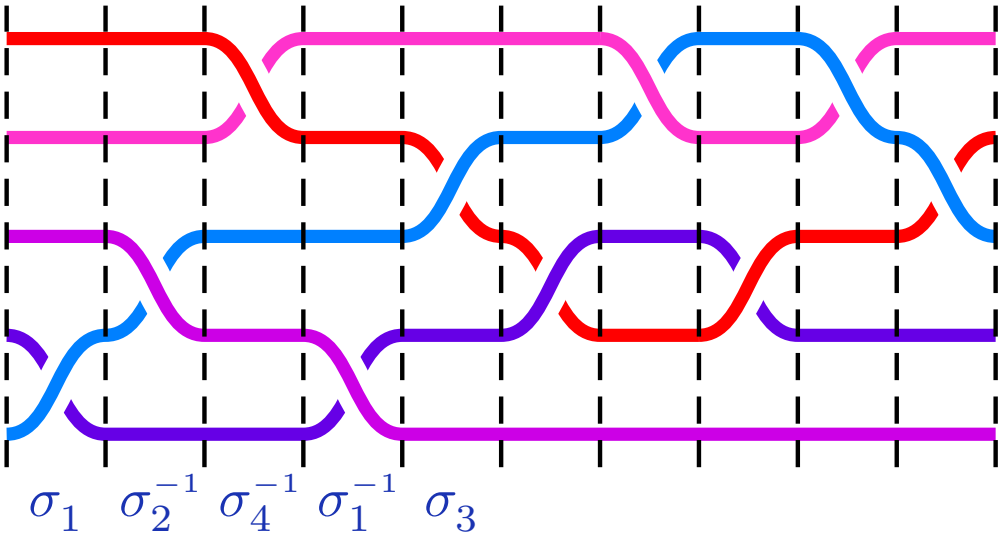
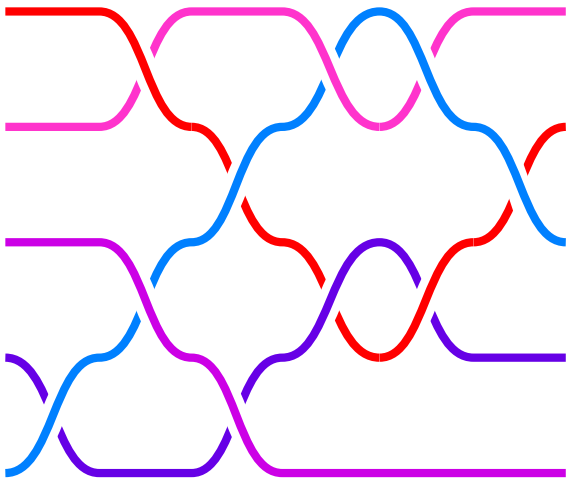


Diagramme de tresses



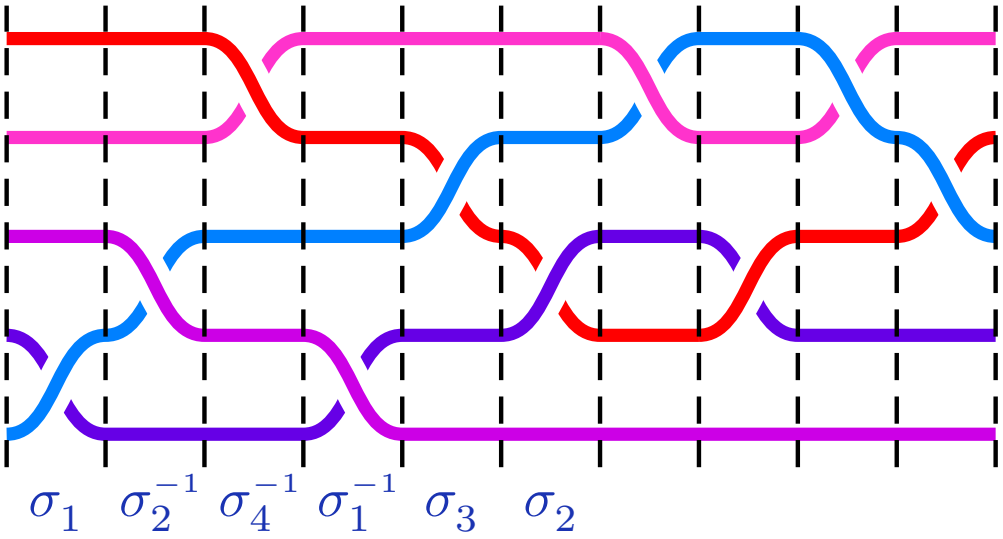
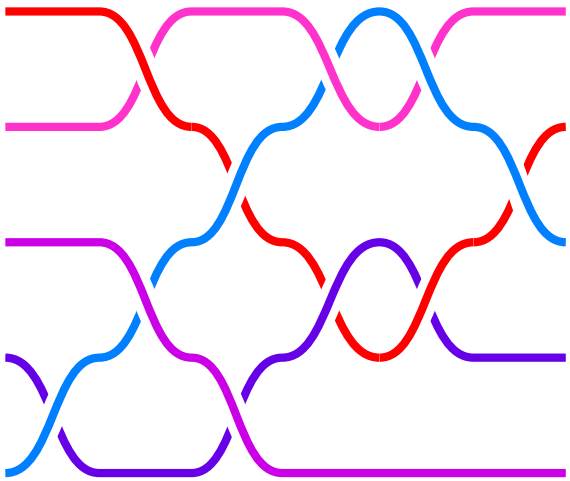
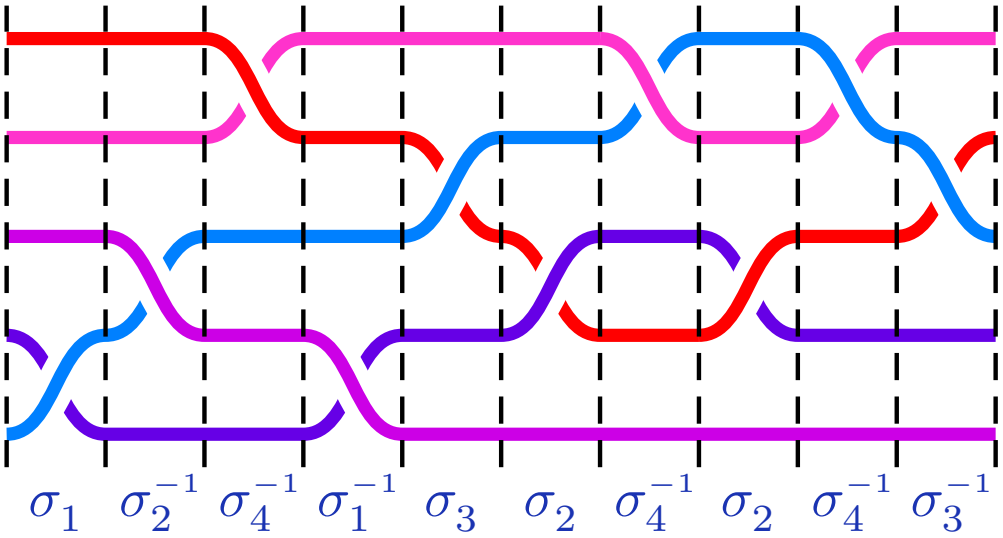


Diagramme de tresses





Présentation de B_n

- Théorème (Artin '25) : Le groupe de tresses B_n admet la présentation :

$$\left\langle \sigma_1, \dots, \sigma_{n-1}; \begin{array}{rcll} \sigma_i\sigma_j & = & \sigma_j\sigma_i & \text{pour } |i-j| \geqslant 2 \\ \sigma_i\sigma_j\sigma_i & = & \sigma_j\sigma_i\sigma_j & \text{pour } |i-j| = 1 \end{array} \right\rangle \quad (1)$$

Présentation de B_n

- Théorème (Artin '25) : Le groupe de tresses B_n admet la présentation :

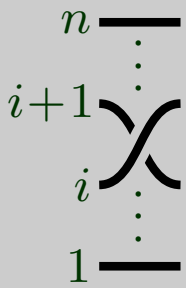
$$\left\langle \sigma_1, \dots, \sigma_{n-1}; \begin{array}{rcll} \sigma_i\sigma_j & = & \sigma_j\sigma_i & \text{pour } |i-j| \geqslant 2 \\ \sigma_i\sigma_j\sigma_i & = & \sigma_j\sigma_i\sigma_j & \text{pour } |i-j| = 1 \end{array} \right\rangle \quad (1)$$

Présentation de B_n

- **Théorème (Artin '25)** : Le groupe de tresses B_n admet la présentation :

$$\left\langle \sigma_1, \dots, \sigma_{n-1}; \begin{array}{rcll} \sigma_i\sigma_j & = & \sigma_j\sigma_i & \text{pour } |i-j| \geqslant 2 \\ \sigma_i\sigma_j\sigma_i & = & \sigma_j\sigma_i\sigma_j & \text{pour } |i-j| = 1 \end{array} \right\rangle \tag{1}$$

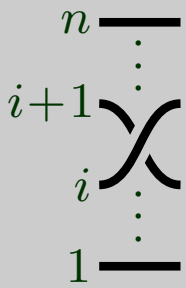
$\sigma_i \rightsquigarrow$



Présentation de B_n

- **Théorème (Artin '25)** : Le groupe de tresses B_n admet la présentation :

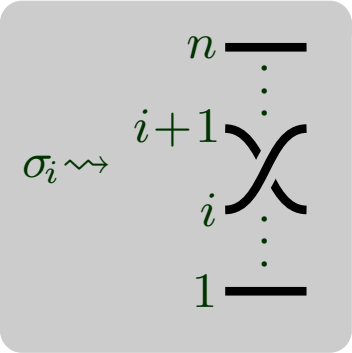
$$\left\langle \sigma_1, \dots, \sigma_{n-1}; \begin{array}{rcll} \sigma_i\sigma_j & = & \sigma_j\sigma_i & \text{pour } |i-j| \geqslant 2 \\ \sigma_i\sigma_j\sigma_i & = & \sigma_j\sigma_i\sigma_j & \text{pour } |i-j| = 1 \end{array} \right\rangle \tag{1}$$

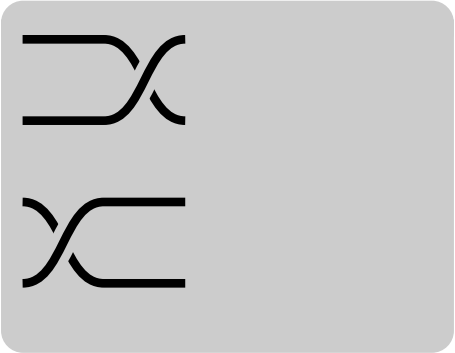
$\sigma_i \rightsquigarrow$ 

Présentation de B_n

- **Théorème (Artin '25)** : Le groupe de tresses B_n admet la présentation :

$$\left\langle \sigma_1, \dots, \sigma_{n-1}; \begin{array}{rcll} \sigma_i\sigma_j & = & \sigma_j\sigma_i & \text{pour } |i-j| \geqslant 2 \\ \sigma_i\sigma_j\sigma_i & = & \sigma_j\sigma_i\sigma_j & \text{pour } |i-j| = 1 \end{array} \right\rangle \tag{1}$$

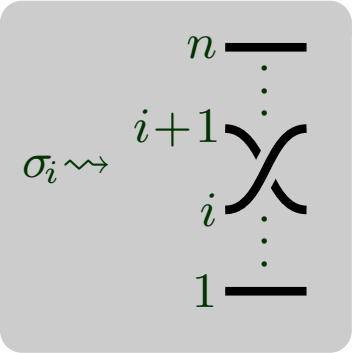


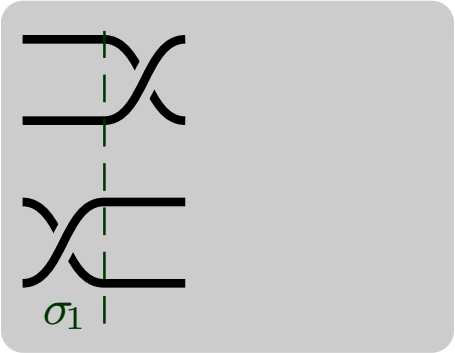


Présentation de B_n

- **Théorème (Artin '25)** : Le groupe de tresses B_n admet la présentation :

$$\left\langle \sigma_1, \dots, \sigma_{n-1}; \begin{array}{rcll} \sigma_i\sigma_j & = & \sigma_j\sigma_i & \text{pour } |i-j| \geqslant 2 \\ \sigma_i\sigma_j\sigma_i & = & \sigma_j\sigma_i\sigma_j & \text{pour } |i-j| = 1 \end{array} \right\rangle \tag{1}$$

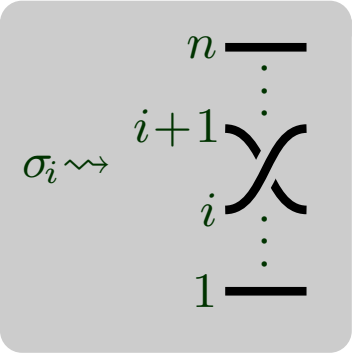


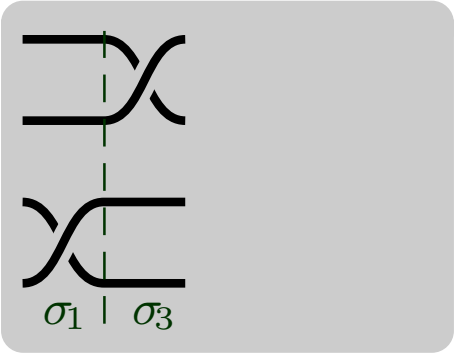


Présentation de B_n

- **Théorème (Artin '25)** : Le groupe de tresses B_n admet la présentation :

$$\left\langle \sigma_1, \dots, \sigma_{n-1}; \begin{array}{rcll} \sigma_i\sigma_j & = & \sigma_j\sigma_i & \text{pour } |i-j| \geqslant 2 \\ \sigma_i\sigma_j\sigma_i & = & \sigma_j\sigma_i\sigma_j & \text{pour } |i-j| = 1 \end{array} \right\rangle \tag{1}$$

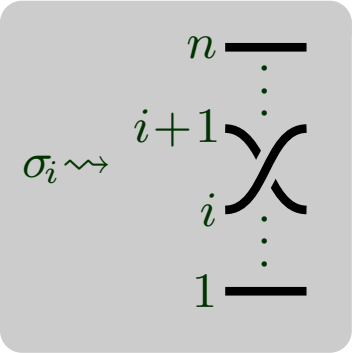


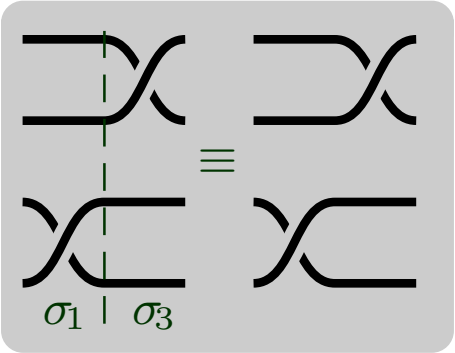


Présentation de B_n

- **Théorème (Artin '25)** : Le groupe de tresses B_n admet la présentation :

$$\left\langle \sigma_1, \dots, \sigma_{n-1}; \begin{array}{rcll} \sigma_i\sigma_j & = & \sigma_j\sigma_i & \text{pour } |i-j| \geqslant 2 \\ \sigma_i\sigma_j\sigma_i & = & \sigma_j\sigma_i\sigma_j & \text{pour } |i-j| = 1 \end{array} \right\rangle \tag{1}$$

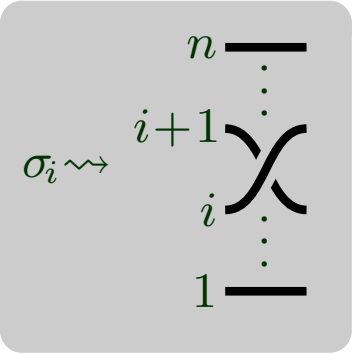


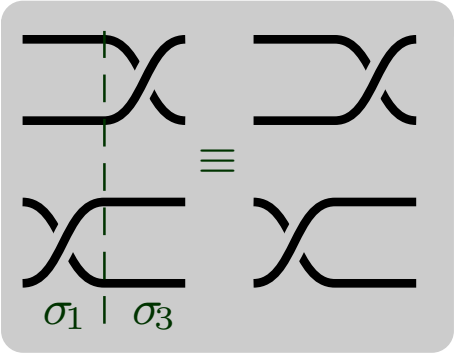


Présentation de B_n

- **Théorème (Artin '25)** : Le groupe de tresses B_n admet la présentation :

$$\left\langle \sigma_1, \dots, \sigma_{n-1}; \begin{array}{rcll} \sigma_i\sigma_j & = & \sigma_j\sigma_i & \text{pour } |i-j| \geqslant 2 \\ \sigma_i\sigma_j\sigma_i & = & \sigma_j\sigma_i\sigma_j & \text{pour } |i-j| = 1 \end{array} \right\rangle \tag{1}$$

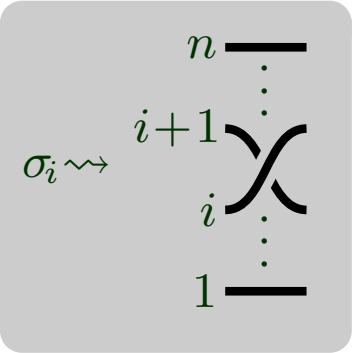


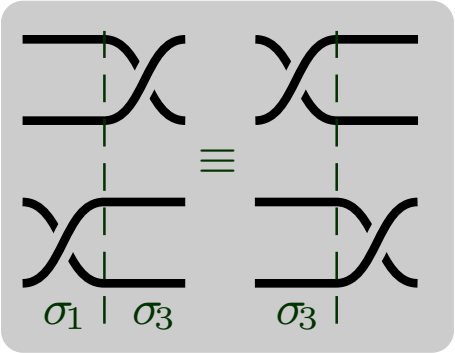


Présentation de B_n

- **Théorème (Artin '25)** : Le groupe de tresses B_n admet la présentation :

$$\left\langle \sigma_1, \dots, \sigma_{n-1}; \begin{array}{rcll} \sigma_i\sigma_j & = & \sigma_j\sigma_i & \text{pour } |i-j| \geqslant 2 \\ \sigma_i\sigma_j\sigma_i & = & \sigma_j\sigma_i\sigma_j & \text{pour } |i-j| = 1 \end{array} \right\rangle \tag{1}$$

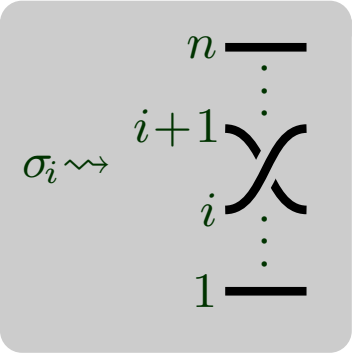


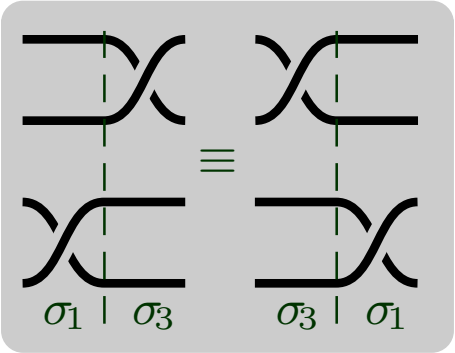


Présentation de B_n

- **Théorème (Artin '25)** : Le groupe de tresses B_n admet la présentation :

$$\left\langle \sigma_1, \dots, \sigma_{n-1}; \begin{array}{rcll} \sigma_i\sigma_j & = & \sigma_j\sigma_i & \text{pour } |i-j| \geqslant 2 \\ \sigma_i\sigma_j\sigma_i & = & \sigma_j\sigma_i\sigma_j & \text{pour } |i-j| = 1 \end{array} \right\rangle \tag{1}$$

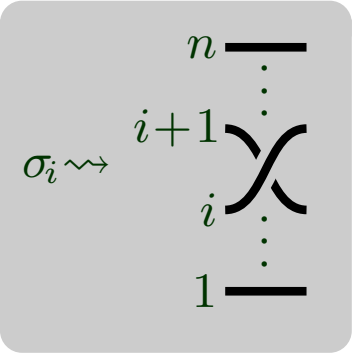


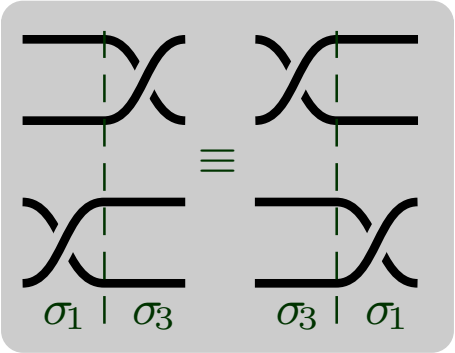


Présentation de B_n

- **Théorème (Artin '25)** : Le groupe de tresses B_n admet la présentation :

$$\left\langle \sigma_1, \dots, \sigma_{n-1}; \begin{array}{rcll} \sigma_i\sigma_j & = & \sigma_j\sigma_i & \text{pour } |i-j| \geqslant 2 \\ \sigma_i\sigma_j\sigma_i & = & \sigma_j\sigma_i\sigma_j & \text{pour } |i-j| = 1 \end{array} \right\rangle \tag{1}$$

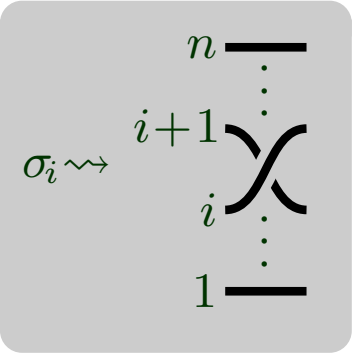


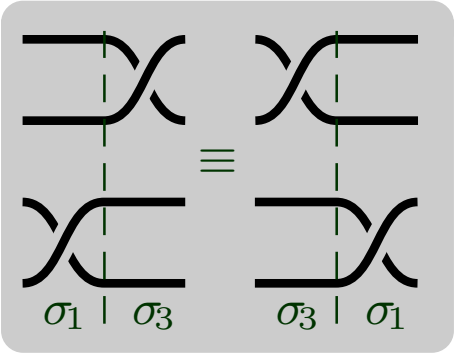


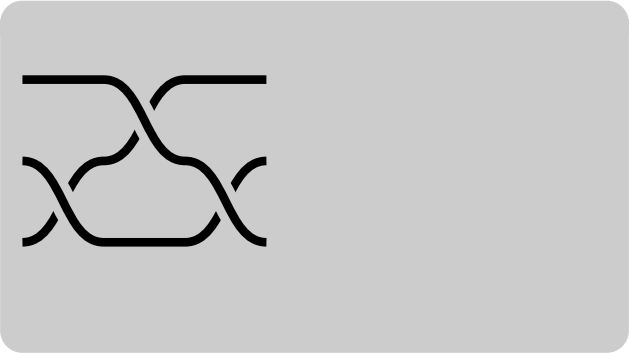
Présentation de B_n

- **Théorème (Artin '25)** : Le groupe de tresses B_n admet la présentation :

$$\left\langle \sigma_1, \dots, \sigma_{n-1}; \begin{array}{rcll} \sigma_i\sigma_j & = & \sigma_j\sigma_i & \text{pour } |i-j| \geqslant 2 \\ \sigma_i\sigma_j\sigma_i & = & \sigma_j\sigma_i\sigma_j & \text{pour } |i-j| = 1 \end{array} \right\rangle \tag{1}$$



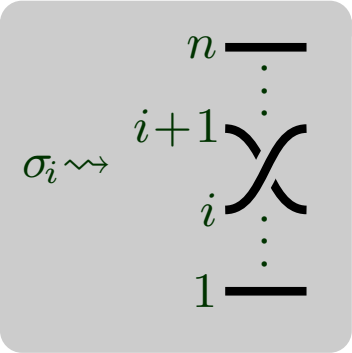


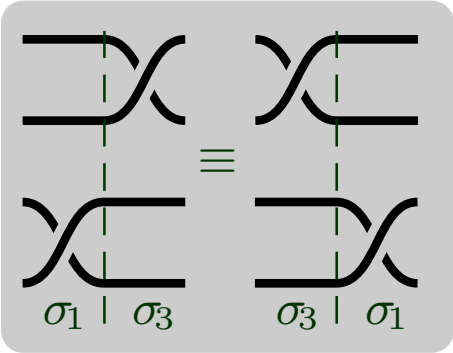


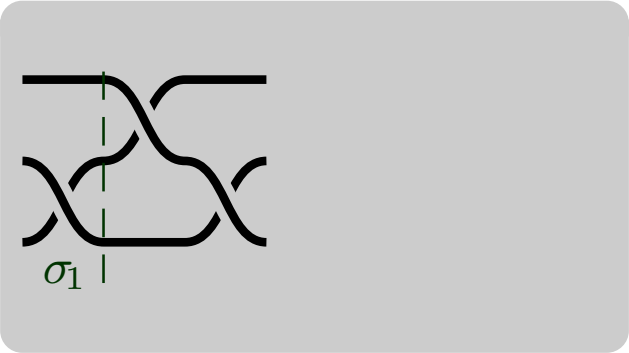
Présentation de B_n

- **Théorème (Artin '25)** : Le groupe de tresses B_n admet la présentation :

$$\left\langle \sigma_1, \dots, \sigma_{n-1}; \begin{array}{rcll} \sigma_i\sigma_j & = & \sigma_j\sigma_i & \text{pour } |i-j| \geqslant 2 \\ \sigma_i\sigma_j\sigma_i & = & \sigma_j\sigma_i\sigma_j & \text{pour } |i-j| = 1 \end{array} \right\rangle \tag{1}$$



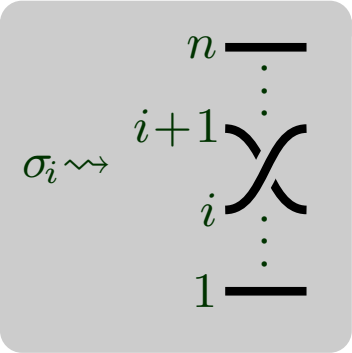


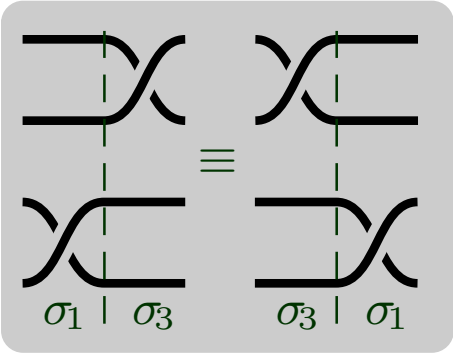


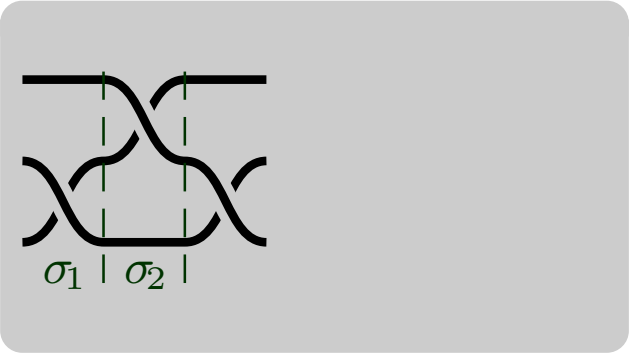
Présentation de B_n

- **Théorème (Artin '25)** : Le groupe de tresses B_n admet la présentation :

$$\left\langle \sigma_1, \dots, \sigma_{n-1}; \begin{array}{rcll} \sigma_i\sigma_j & = & \sigma_j\sigma_i & \text{pour } |i-j| \geqslant 2 \\ \sigma_i\sigma_j\sigma_i & = & \sigma_j\sigma_i\sigma_j & \text{pour } |i-j| = 1 \end{array} \right\rangle \tag{1}$$



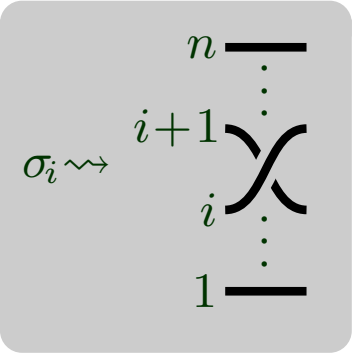


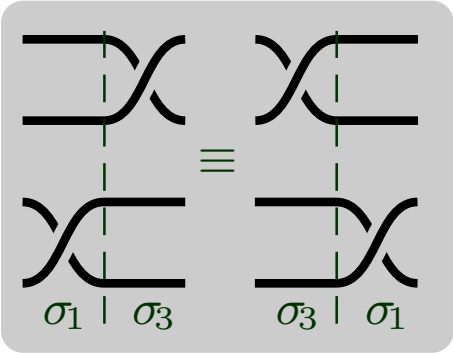


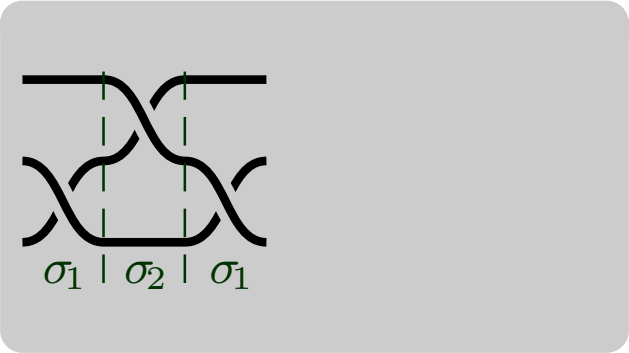
Présentation de B_n

- **Théorème (Artin '25)** : Le groupe de tresses B_n admet la présentation :

$$\left\langle \sigma_1, \dots, \sigma_{n-1}; \begin{array}{rcll} \sigma_i\sigma_j & = & \sigma_j\sigma_i & \text{pour } |i-j| \geqslant 2 \\ \sigma_i\sigma_j\sigma_i & = & \sigma_j\sigma_i\sigma_j & \text{pour } |i-j| = 1 \end{array} \right\rangle \tag{1}$$



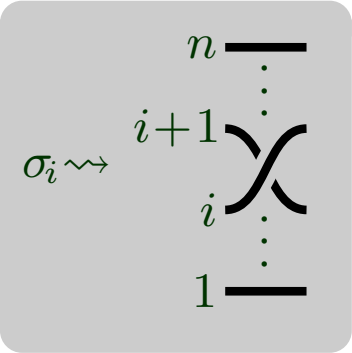


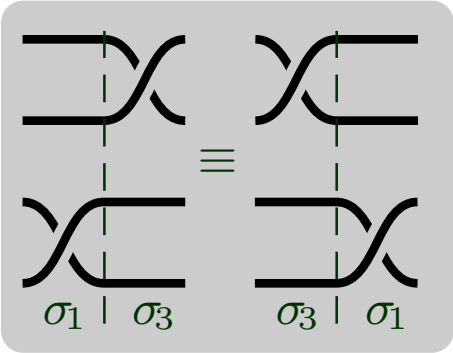


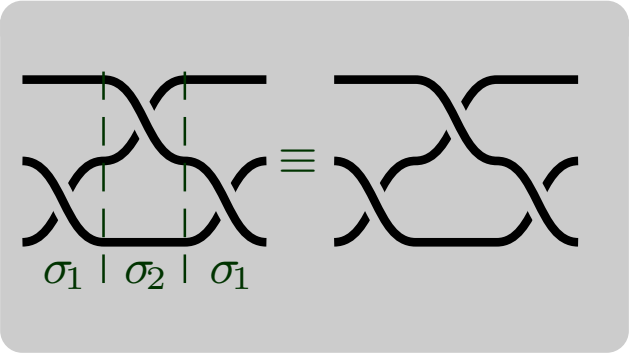
Présentation de B_n

- **Théorème (Artin '25)** : Le groupe de tresses B_n admet la présentation :

$$\left\langle \sigma_1, \dots, \sigma_{n-1}; \begin{array}{rcll} \sigma_i\sigma_j & = & \sigma_j\sigma_i & \text{pour } |i-j| \geqslant 2 \\ \sigma_i\sigma_j\sigma_i & = & \sigma_j\sigma_i\sigma_j & \text{pour } |i-j| = 1 \end{array} \right\rangle \tag{1}$$



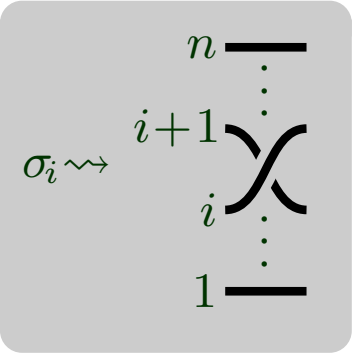


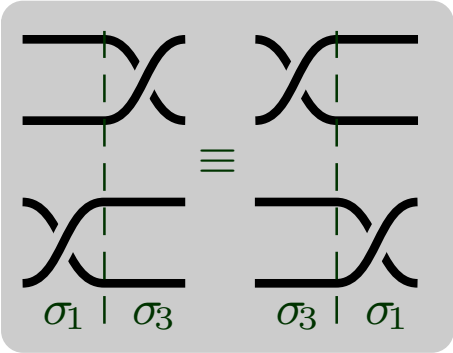


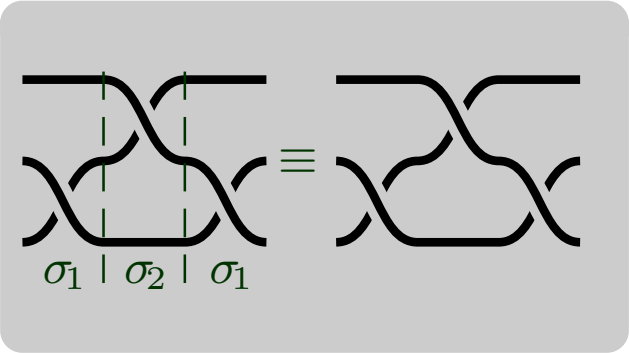
Présentation de B_n

- **Théorème (Artin '25)** : Le groupe de tresses B_n admet la présentation :

$$\left\langle \sigma_1, \dots, \sigma_{n-1}; \begin{array}{rcll} \sigma_i\sigma_j & = & \sigma_j\sigma_i & \text{pour } |i-j| \geqslant 2 \\ \sigma_i\sigma_j\sigma_i & = & \sigma_j\sigma_i\sigma_j & \text{pour } |i-j| = 1 \end{array} \right\rangle \tag{1}$$



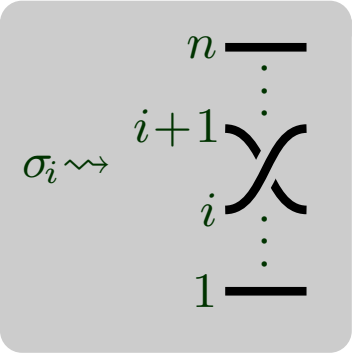


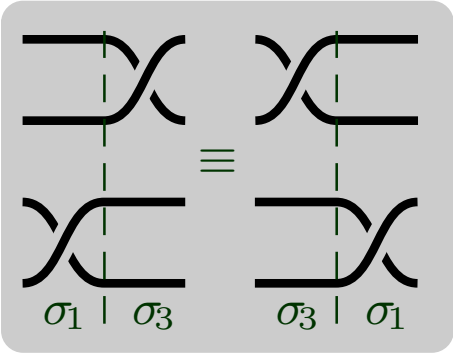


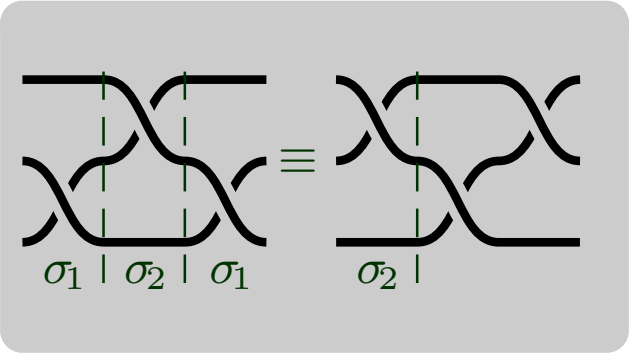
Présentation de B_n

- **Théorème (Artin '25)** : Le groupe de tresses B_n admet la présentation :

$$\left\langle \sigma_1, \dots, \sigma_{n-1}; \begin{array}{rcll} \sigma_i\sigma_j & = & \sigma_j\sigma_i & \text{pour } |i-j| \geqslant 2 \\ \sigma_i\sigma_j\sigma_i & = & \sigma_j\sigma_i\sigma_j & \text{pour } |i-j| = 1 \end{array} \right\rangle \tag{1}$$



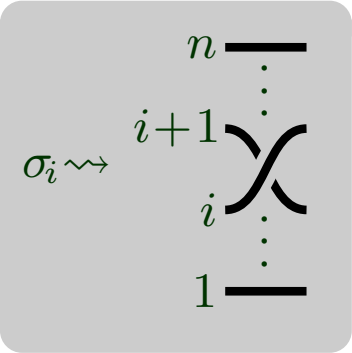


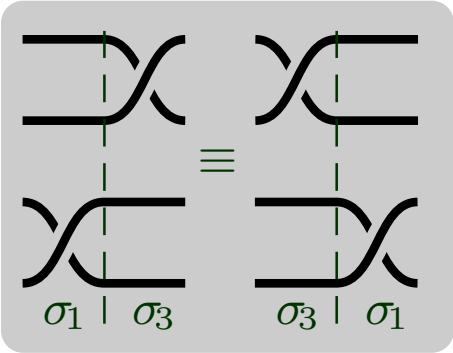


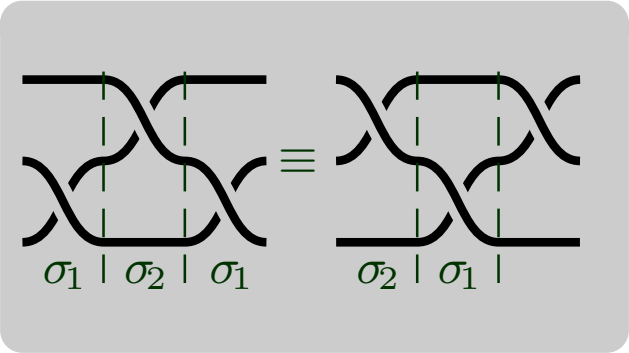
Présentation de B_n

- **Théorème (Artin '25)** : Le groupe de tresses B_n admet la présentation :

$$\left\langle \sigma_1, \dots, \sigma_{n-1}; \begin{array}{rcll} \sigma_i\sigma_j & = & \sigma_j\sigma_i & \text{pour } |i-j| \geqslant 2 \\ \sigma_i\sigma_j\sigma_i & = & \sigma_j\sigma_i\sigma_j & \text{pour } |i-j| = 1 \end{array} \right\rangle \tag{1}$$



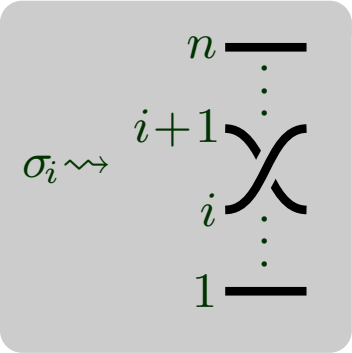


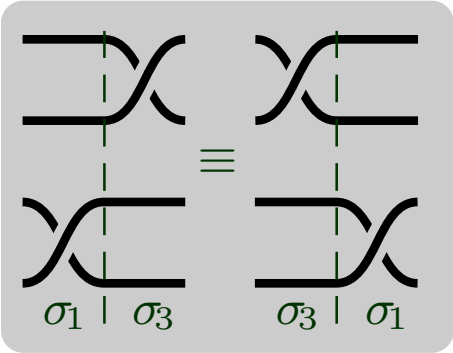


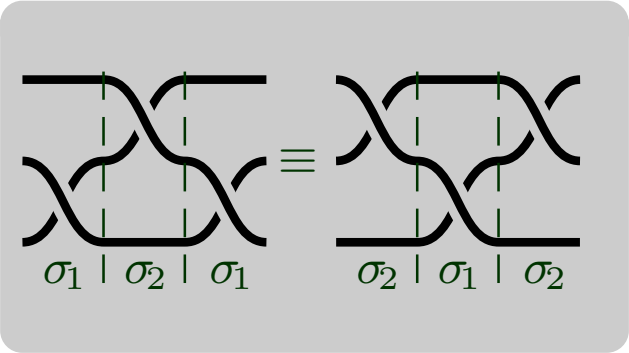
Présentation de B_n

- **Théorème (Artin '25)** : Le groupe de tresses B_n admet la présentation :

$$\left\langle \sigma_1, \dots, \sigma_{n-1}; \begin{array}{rcll} \sigma_i\sigma_j & = & \sigma_j\sigma_i & \text{pour } |i-j| \geqslant 2 \\ \sigma_i\sigma_j\sigma_i & = & \sigma_j\sigma_i\sigma_j & \text{pour } |i-j| = 1 \end{array} \right\rangle \tag{1}$$



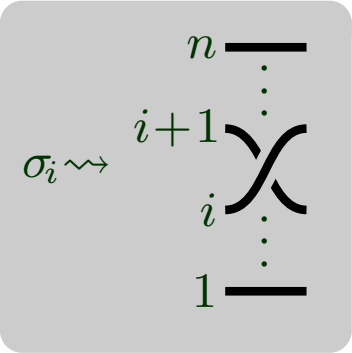


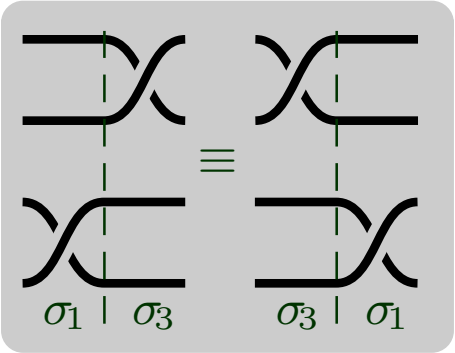


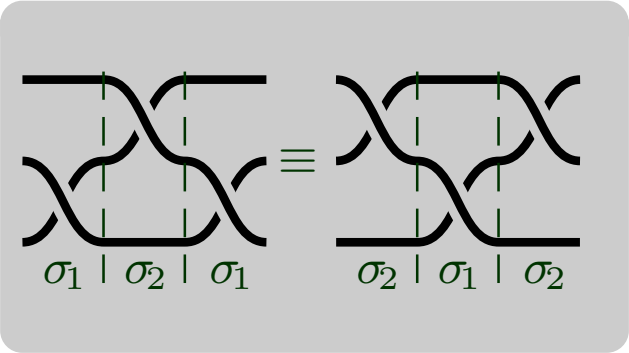
Présentation de B_n

- **Théorème (Artin '25)** : Le groupe de tresses B_n admet la présentation :

$$\left\langle \sigma_1, \dots, \sigma_{n-1}; \begin{array}{rcll} \sigma_i\sigma_j & = & \sigma_j\sigma_i & \text{pour } |i-j| \geqslant 2 \\ \sigma_i\sigma_j\sigma_i & = & \sigma_j\sigma_i\sigma_j & \text{pour } |i-j| = 1 \end{array} \right\rangle \qquad (1)$$





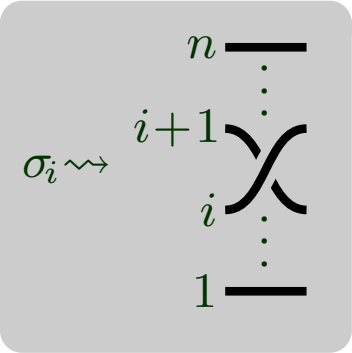


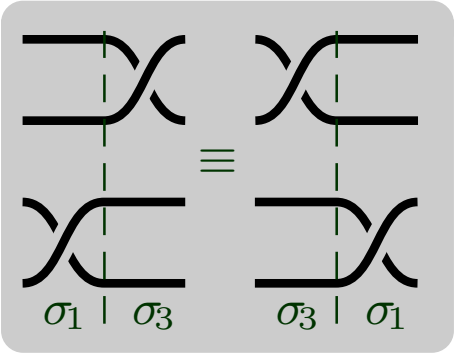
- **Problème du mot** : Étant donnés deux mots w et w', décider si w et w' sont équivalents pour les relations (1)

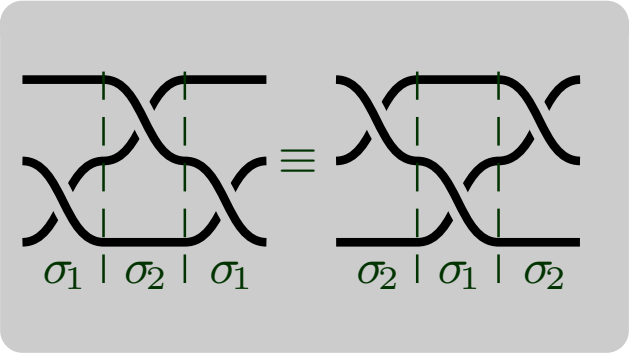
Présentation de B_n

- **Théorème (Artin '25)** : Le groupe de tresses B_n admet la présentation :

$$\left\langle \sigma_1, \dots, \sigma_{n-1}; \begin{array}{rcll} \sigma_i\sigma_j & = & \sigma_j\sigma_i & \text{pour } |i-j| \geqslant 2 \\ \sigma_i\sigma_j\sigma_i & = & \sigma_j\sigma_i\sigma_j & \text{pour } |i-j| = 1 \end{array} \right\rangle \tag{1}$$





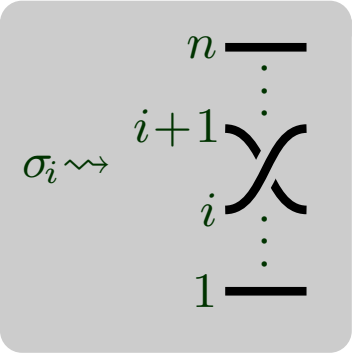


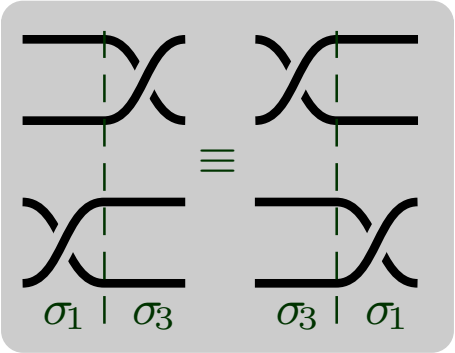
- **Problème du mot** : Étant donnés deux mots w et w', décider si w et w' sont équivalents pour les relations (1), c.-à-d., si $w \equiv w'$ est vérifiée.

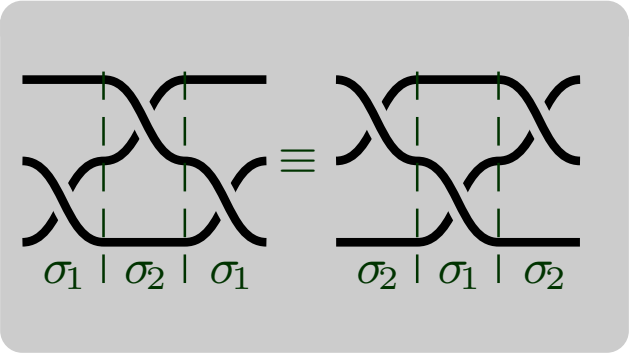
Présentation de B_n

- **Théorème (Artin '25)** : Le groupe de tresses B_n admet la présentation :

$$\left\langle \sigma_1, \dots, \sigma_{n-1}; \begin{array}{rcll} \sigma_i\sigma_j & = & \sigma_j\sigma_i & \text{pour } |i-j| \geqslant 2 \\ \sigma_i\sigma_j\sigma_i & = & \sigma_j\sigma_i\sigma_j & \text{pour } |i-j| = 1 \end{array} \right\rangle \tag{1}$$







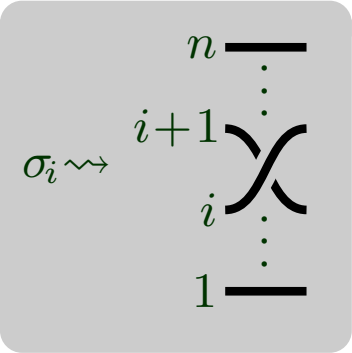
- **Problème du mot** : Étant donnés deux mots w et w', décider si w et w' sont équivalents pour les relations (1), c.-à-d., si $w \equiv w'$ est vérifiée.

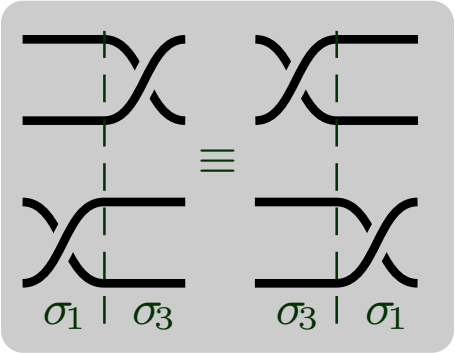
où $\equiv$ est la plus petite congruence contenant

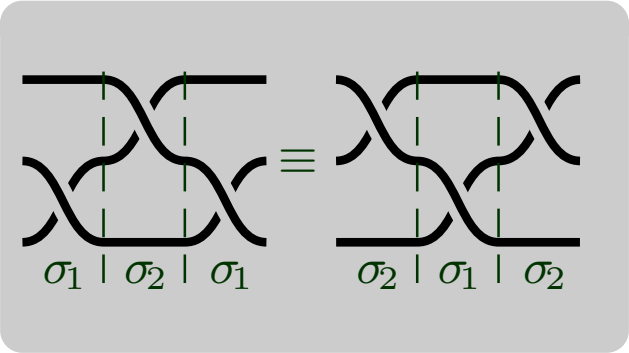
Présentation de B_n

- **Théorème (Artin '25)** : Le groupe de tresses B_n admet la présentation :

$$\left\langle \sigma_1, \dots, \sigma_{n-1}; \begin{array}{rcll} \sigma_i\sigma_j & = & \sigma_j\sigma_i & \text{pour } |i-j| \geqslant 2 \\ \sigma_i\sigma_j\sigma_i & = & \sigma_j\sigma_i\sigma_j & \text{pour } |i-j| = 1 \end{array} \right\rangle \qquad (1)$$







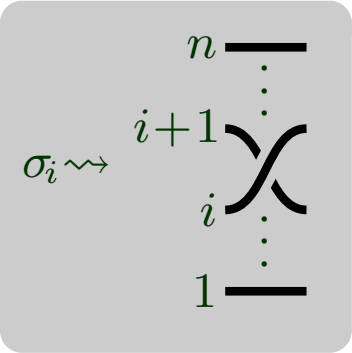
- **Problème du mot** : Étant donnés deux mots w et w', décider si w et w' sont équivalents pour les relations (1), c.-à-d., si $w \equiv w'$ est vérifiée.

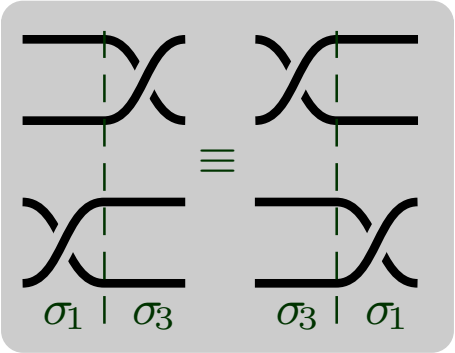
où $\equiv$ est la plus petite congruence contenant $(\sigma_i\sigma_j, \sigma_j\sigma_i)$ pour $|i-j| \geqslant 2$,

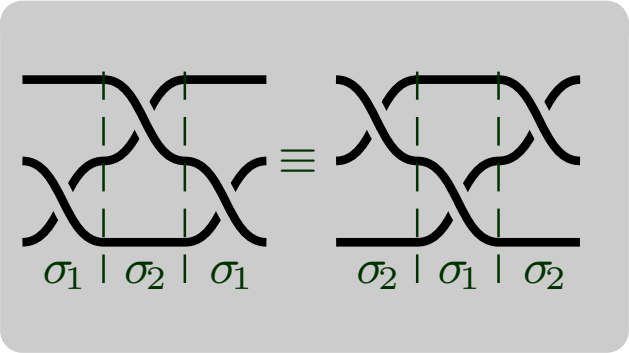
Présentation de B_n

- **Théorème (Artin '25)** : Le groupe de tresses B_n admet la présentation :

$$\left\langle \sigma_1, \dots, \sigma_{n-1}; \begin{array}{rcll} \sigma_i\sigma_j & = & \sigma_j\sigma_i & \text{pour } |i-j| \geqslant 2 \\ \sigma_i\sigma_j\sigma_i & = & \sigma_j\sigma_i\sigma_j & \text{pour } |i-j| = 1 \end{array} \right\rangle \tag{1}$$







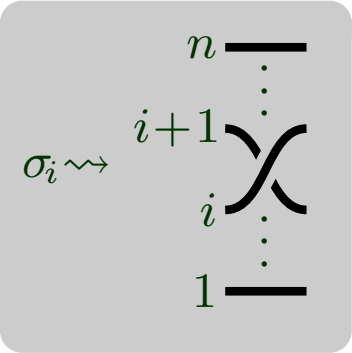
- **Problème du mot** : Étant donnés deux mots w et w', décider si w et w' sont équivalents pour les relations (1), c.-à-d., si $w \equiv w'$ est vérifiée.

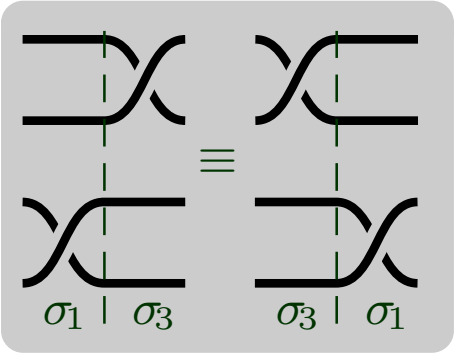
où $\equiv$ est la plus petite congruence contenant $(\sigma_i\sigma_j, \sigma_j\sigma_i)$ pour $|i-j| \geqslant 2$, $(\sigma_i\sigma_j\sigma_i, \sigma_j\sigma_i\sigma_j)$ pour $|i-j| = 1$,

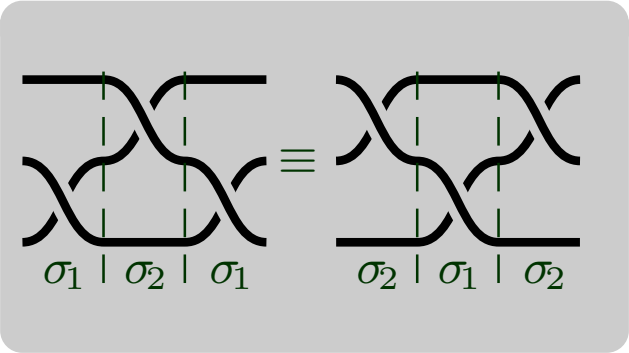
Présentation de B_n

• Théorème (Artin '25) : Le groupe de tresses B_n admet la présentation :

$$\left\langle \sigma_1, \dots, \sigma_{n-1}; \begin{array}{rcll} \sigma_i\sigma_j & = & \sigma_j\sigma_i & \text{pour } |i-j| \geqslant 2 \\ \sigma_i\sigma_j\sigma_i & = & \sigma_j\sigma_i\sigma_j & \text{pour } |i-j| = 1 \end{array} \right\rangle \qquad (1)$$







• Problème du mot : Étant donnés deux mots w et w', décider si w et w' sont équivalents pour les relations (1), c.-à-d., si $w \equiv w'$ est vérifiée.

où $\equiv$ est la plus petite congruence contenant $(\sigma_i\sigma_j, \sigma_j\sigma_i)$ pour $|i-j| \geqslant 2$, $(\sigma_i\sigma_j\sigma_i, \sigma_j\sigma_i\sigma_j)$ pour $|i-j| = 1$, $(\sigma_i\sigma_i^{-1}, \varepsilon)$ et $(\sigma_i^{-1}\sigma_i, \varepsilon)$ pour tout i.

Monoïde de tresses positives

- Définition : On note B_n^+ le monoïde de présentation :

$$\left\langle \begin{array}{rcll} \sigma_i\sigma_j & = & \sigma_j\sigma_i & \text{pour } |i-j| \geqslant 2 \\ \sigma_i\sigma_j\sigma_i & = & \sigma_j\sigma_i\sigma_j & \text{pour } |i-j| = 1 \end{array} \right\rangle^+$$

Monoïde de tresses positives

- Définition : On note B_n^+ le monoïde de présentation :

$$\left\langle \begin{array}{rcll} \sigma_i\sigma_j & = & \sigma_j\sigma_i & \text{pour } |i-j| \geqslant 2 \\ \sigma_i\sigma_j\sigma_i & = & \sigma_j\sigma_i\sigma_j & \text{pour } |i-j| = 1 \end{array} \right\rangle^+$$

$\rightsquigarrow$ Étude de $\equiv^+$, la plus petite congruence contenant

Monoïde de tresses positives

- Définition : On note B_n^+ le monoïde de présentation :

$$\left\langle \begin{array}{rcll} \sigma_i\sigma_j & = & \sigma_j\sigma_i & \text{pour } |i-j| \geqslant 2 \\ \sigma_i\sigma_j\sigma_i & = & \sigma_j\sigma_i\sigma_j & \text{pour } |i-j| = 1 \end{array} \right\rangle^+$$

$\rightsquigarrow$ Étude de $\equiv^+$, la plus petite congruence contenant $(\sigma_i\sigma_j, \sigma_j\sigma_i)$ pour $|i-j| \geqslant 2$,

Monoïde de tresses positives

- Définition : On note B_n^+ le monoïde de présentation :

$$\left\langle \begin{array}{rcll} \sigma_i\sigma_j & = & \sigma_j\sigma_i & \text{pour } |i-j| \geqslant 2 \\ \sigma_i\sigma_j\sigma_i & = & \sigma_j\sigma_i\sigma_j & \text{pour } |i-j| = 1 \end{array} \right\rangle^+$$

$\rightsquigarrow$ Étude de $\equiv^+$, la plus petite congruence contenant $(\sigma_i\sigma_j, \sigma_j\sigma_i)$ pour $|i-j| \geqslant 2$, $(\sigma_i\sigma_j\sigma_i, \sigma_j\sigma_i\sigma_j)$ pour $|i-j| = 1$

Monoïde de tresses positives

- Définition : On note B_n^+ le monoïde de présentation :

$$\left\langle \begin{array}{rcll} \sigma_i\sigma_j & = & \sigma_j\sigma_i & \text{pour } |i-j| \geqslant 2 \\ \sigma_i\sigma_j\sigma_i & = & \sigma_j\sigma_i\sigma_j & \text{pour } |i-j| = 1 \end{array} \right\rangle^+$$

$\rightsquigarrow$ Étude de $\equiv^+$, la plus petite congruence contenant $(\sigma_i\sigma_j, \sigma_j\sigma_i)$ pour $|i-j| \geqslant 2$, $(\sigma_i\sigma_j\sigma_i, \sigma_j\sigma_i\sigma_j)$ pour $|i-j| = 1$.

Monoïde de tresses positives

- Définition : On note B_n^+ le monoïde de présentation :

$$\left\langle \begin{array}{rcll} \sigma_i\sigma_j & = & \sigma_j\sigma_i & \text{pour } |i-j| \geqslant 2 \\ \sigma_i\sigma_j\sigma_i & = & \sigma_j\sigma_i\sigma_j & \text{pour } |i-j| = 1 \end{array} \right\rangle^+$$

$\rightsquigarrow$ Étude de $\equiv^+$, la plus petite congruence contenant $(\sigma_i\sigma_j, \sigma_j\sigma_i)$ pour $|i-j| \geqslant 2$, $(\sigma_i\sigma_j\sigma_i, \sigma_j\sigma_i\sigma_j)$ pour $|i-j| = 1$.

- Question : Soient w et w' deux mots de tresses positives, quels sont les liens entre $w \equiv w'$ et $w \equiv^+ w'$?

Monoïde de tresses positives

- Définition : On note B_n^+ le monoïde de présentation :

$$\left\langle \begin{array}{rcll} \sigma_i\sigma_j & = & \sigma_j\sigma_i & \text{pour } |i-j| \geqslant 2 \\ \sigma_i\sigma_j\sigma_i & = & \sigma_j\sigma_i\sigma_j & \text{pour } |i-j| = 1 \end{array} \right\rangle^+$$

$\rightsquigarrow$ Étude de $\equiv^+$, la plus petite congruence contenant $(\sigma_i\sigma_j, \sigma_j\sigma_i)$ pour $|i-j| \geqslant 2$, $(\sigma_i\sigma_j\sigma_i, \sigma_j\sigma_i\sigma_j)$ pour $|i-j| = 1$.

- Question : Soient w et w' deux mots de tresses positives, quels sont les liens entre $w \equiv w'$ et $w \equiv^+ w'$?

$\rightsquigarrow$ Clairement $w \equiv^+ w'$ implique $w \equiv w'$.

Théorème de Ore

- Théorème (Ore) : Si le monoïde $\langle S \mid R \rangle^+$ est simplifiable et admet des multiples communs, il se plonge dans le groupe $\langle S \mid R \rangle$.

Théorème de Ore

- Théorème (Ore) : Si le monoïde $\langle S \mid R \rangle^+$ est simplifiable et admet des multiples communs, il se plonge dans le groupe $\langle S \mid R \rangle$.

$u\,w\,v = uw'v \Rightarrow w = w'$

Théorème de Ore

- Théorème (Ore) : Si le monoïde $\langle S \mid R \rangle^+$ est simplifiable et admet des multiples communs, il se plonge dans le groupe $\langle S \mid R \rangle$.

$u\,w\,v = uw'v \Rightarrow w = w'$

$\rightsquigarrow$ Le groupe $\langle S \mid R \rangle$ est alors groupe de fraction de $\langle S \mid R \rangle^+$.

Théorème de Ore

- Théorème (Ore) : Si le monoïde $\langle S \mid R \rangle^+$ est simplifiable et admet des multiples communs, il se plonge dans le groupe $\langle S \mid R \rangle$.

$u\,w\,v = uw'v \Rightarrow w = w'$

$\rightsquigarrow$ Le groupe $\langle S \mid R \rangle$ est alors groupe de fraction de $\langle S \mid R \rangle^+$.

$\rightsquigarrow$ Les relations $\equiv_R$ et $\equiv_R^+$ sont équivalentes.

Théorème de Ore

- Théorème (Ore) : Si le monoïde $\langle S \mid R \rangle^+$ est simplifiable et admet des multiples communs, il se plonge dans le groupe $\langle S \mid R \rangle$.

$u\,w\,v = uw'v \Rightarrow w = w'$

$\rightsquigarrow$ Le groupe $\langle S \mid R \rangle$ est alors groupe de fraction de $\langle S \mid R \rangle^+$.

$\rightsquigarrow$ Les relations $\equiv_R$ et $\equiv_R^+$ sont équivalentes.

- Proposition (Garside '69) : Le monoïde B_n^+ est simplifiable et admet des multiples communs.

Structure de Garside de B_n^+

- Pour β, $\gamma \in B_n^+$, la tresse γ divise β si $\beta = \beta'\gamma$

Structure de Garside de B_n^+

- Pour β, $\gamma \in B_n^+$, la tresse γ divise β si $\beta = \beta'\gamma$, avec $\beta' \in B_n^+$.

Structure de Garside de B_n^+

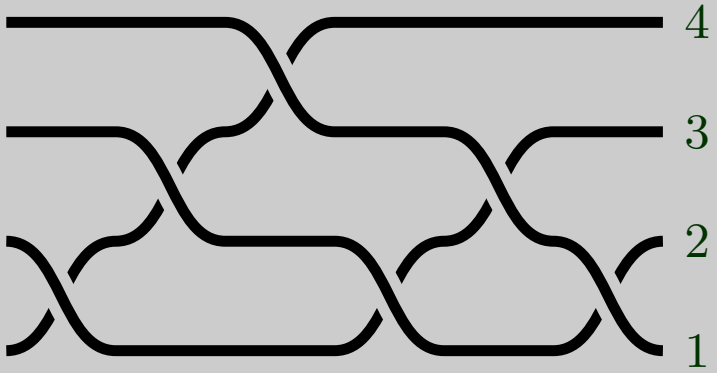
- Pour β, $\gamma \in B_n^+$, la tresse γ divise β si $\beta = \beta'\gamma$, avec $\beta' \in B_n^+$.

$\rightsquigarrow$ on dit que β est un multiple de γ

Structure de Garside de B_n^+

- Pour β, $\gamma \in B_n^+$, la tresse γ divise β si $\beta = \beta'\gamma$, avec $\beta' \in B_n^+$.

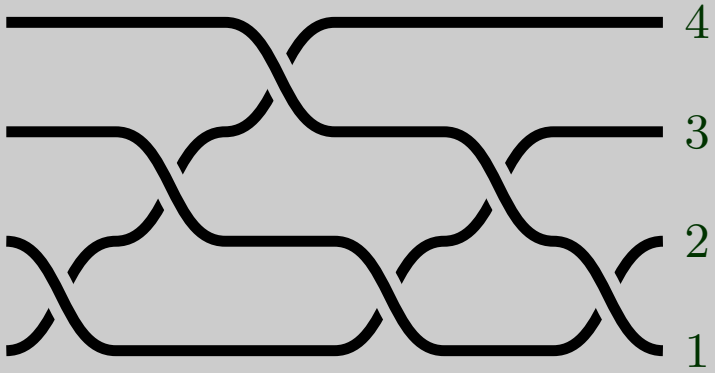
$\rightsquigarrow$ on dit que β est un multiple de γ

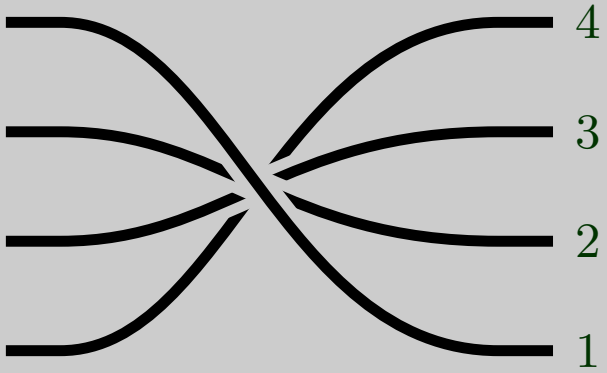
$\Delta_n =$ 

Structure de Garside de B_n^+

- Pour β, $\gamma \in B_n^+$, la tresse γ divise β si $\beta = \beta'\gamma$, avec $\beta' \in B_n^+$.

$\rightsquigarrow$ on dit que β est un multiple de γ

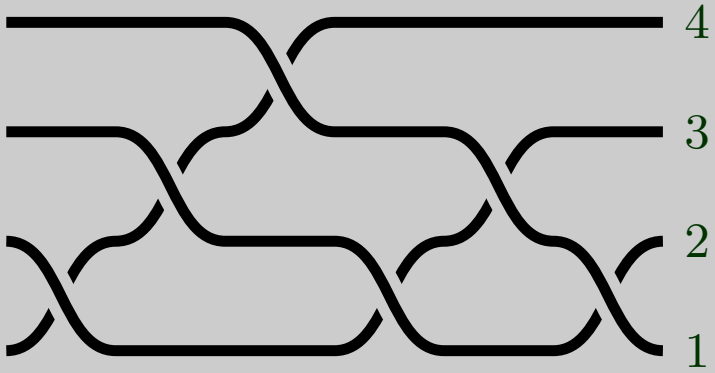
$\Delta_n =$ 

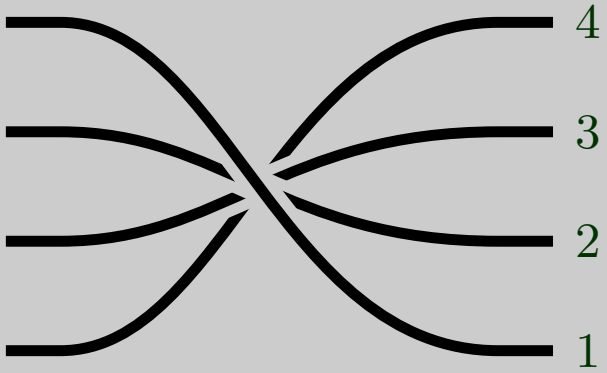
$\approx$ 

Structure de Garside de B_n^+

- Pour β, $\gamma \in B_n^+$, la tresse γ divise β si $\beta = \beta'\gamma$, avec $\beta' \in B_n^+$.

$\rightsquigarrow$ on dit que β est un multiple de γ

$\Delta_n =$ 

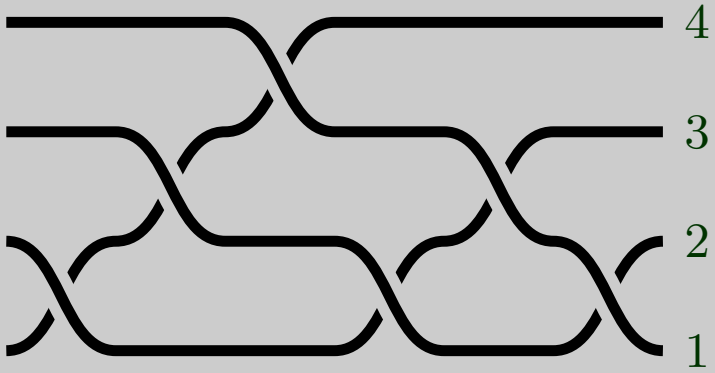
$\approx$ 

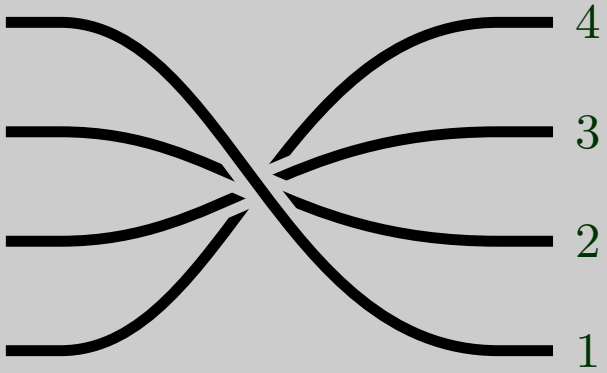
$\rightsquigarrow$ Δ_n est le plus petit multiple commun de $\sigma_1, \ldots, \sigma_{n-1}$.

Structure de Garside de B_n^+

- Pour β, $\gamma \in B_n^+$, la tresse γ divise β si $\beta = \beta'\gamma$, avec $\beta' \in B_n^+$.

$\rightsquigarrow$ on dit que β est un multiple de γ

$\Delta_n =$ 

$\approx$ 

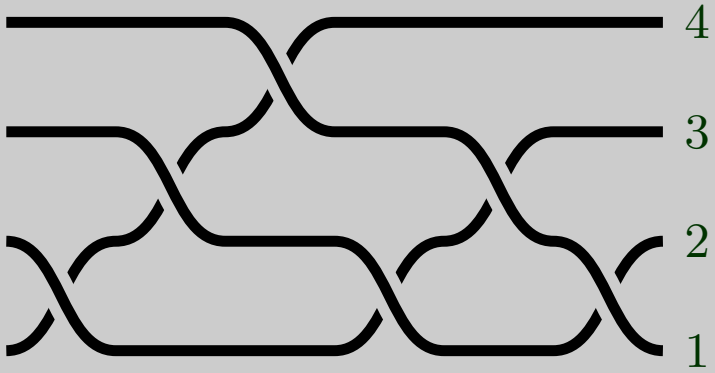
$\rightsquigarrow$ Δ_n est le plus petit multiple commun de $\sigma_1, \ldots, \sigma_{n-1}$.

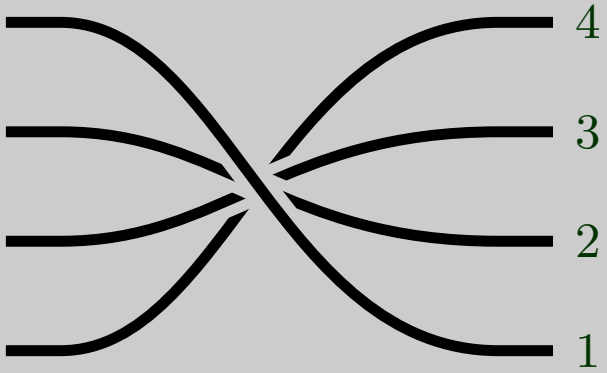
- Les diviseurs de Δ_n sont les simples de B_n^+.

Structure de Garside de B_n^+

- Pour β, $\gamma \in B_n^+$, la tresse γ divise β si $\beta = \beta'\gamma$, avec $\beta' \in B_n^+$.

$\rightsquigarrow$ on dit que β est un multiple de γ

$\Delta_n =$ 

$\approx$ 

$\rightsquigarrow$ Δ_n est le plus petit multiple commun de $\sigma_1, ..., \sigma_{n-1}$.

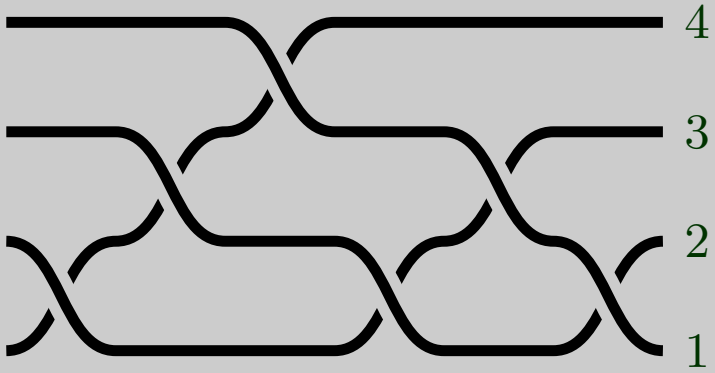
- Les diviseurs de Δ_n sont les simples de B_n^+.

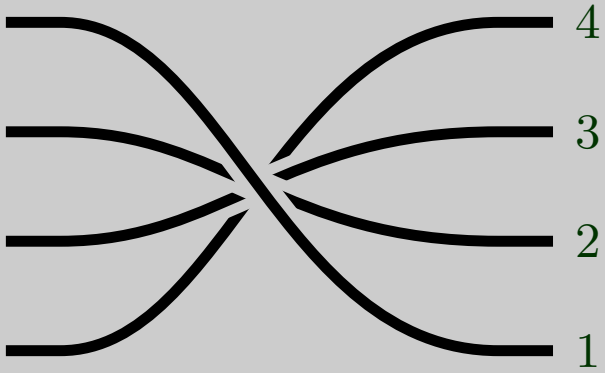
$\rightsquigarrow$ toute tresse β de B_n^+ admet un diviseur simple maximal

Structure de Garside de B_n^+

- Pour β, $\gamma \in B_n^+$, la tresse γ divise β si $\beta = \beta'\gamma$, avec $\beta' \in B_n^+$.

$\rightsquigarrow$ on dit que β est un multiple de γ

$\Delta_n =$ 

$\approx$ 

$\rightsquigarrow$ Δ_n est le plus petit multiple commun de $\sigma_1, ..., \sigma_{n-1}$.

- Les diviseurs de Δ_n sont les simples de B_n^+.

$\rightsquigarrow$ toute tresse β de B_n^+ admet un diviseur simple maximal
$\rightsquigarrow$ calculable en temps $O(|\beta|)$

Structure de Garside de B_n^+

- Les simples de B_n^+ sont en bijection avec les élément de $\mathfrak{S}_n$.

Structure de Garside de B_n^+

- Les simples de B_n^+ sont en bijection avec les élément de $\mathfrak{S}_n$.

- Théorème : Toute tresse β de B_n admet une unique expression

$$\Delta_n^k \cdot \beta_\ell \cdot \ldots \cdot \beta_1$$

avec $k \in \mathbb{Z}$ et β_i simple maximal divisant $\beta_{i+1}\,\beta_i$.

Structure de Garside de B_n^+

- Les simples de B_n^+ sont en bijection avec les élément de $\mathfrak{S}_n$.

- Théorème : Toute tresse β de B_n admet une unique expression
$$\Delta_n^k \cdot \beta_\ell \cdot \ldots \cdot \beta_1$$
avec $k \in \mathbb{Z}$ et β_i simple maximal divisant $\beta_{i+1}\,\beta_i$.

$\rightsquigarrow$ forme normale de Garside de β

Structure de Garside de B_n^+

- Les simples de B_n^+ sont en bijection avec les élément de $\mathfrak{S}_n$.

- Théorème : Toute tresse β de B_n admet une unique expression
$$\Delta_n^k \cdot \beta_\ell \cdot \ldots \cdot \beta_1$$
avec $k \in \mathbb{Z}$ et β_i simple maximal divisant $\beta_{i+1}\,\beta_i$.

$\rightsquigarrow$ forme normale de Garside de β
$\rightsquigarrow$ calculable en temps $O(|\beta|^2)$

Structure de Garside de B_n^+

- Les simples de B_n^+ sont en bijection avec les élément de $\mathfrak{S}_n$.

- Théorème : Toute tresse β de B_n admet une unique expression
$$\Delta_n^k \cdot \beta_\ell \cdot \ldots \cdot \beta_1$$
avec $k \in \mathbb{Z}$ et β_i simple maximal divisant $\beta_{i+1}\,\beta_i$.

$\rightsquigarrow$ forme normale de Garside de β
$\rightsquigarrow$ calculable en temps $O(|\beta|^2)$

$\rightsquigarrow$ Solution quadratique au problème du mot sur B_n^+

Structure de Garside de B_n^+

- Les simples de B_n^+ sont en bijection avec les élément de $\mathfrak{S}_n$.

- Théorème : Toute tresse β de B_n admet une unique expression
$$\Delta_n^k \cdot \beta_\ell \cdot \ldots \cdot \beta_1$$
avec $k \in \mathbb{Z}$ et β_i simple maximal divisant $\beta_{i+1}\,\beta_i$.

$\rightsquigarrow$ forme normale de Garside de β
$\rightsquigarrow$ calculable en temps $O(|\beta|^2)$

$\rightsquigarrow$ Solution quadratique au problème du mot sur B_n^+ et B_n.

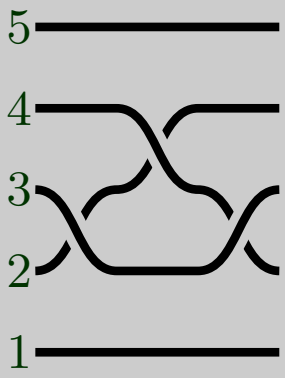
Les tresses $a_{p,q}$

- Définition : On pose $a_{p,q} = \sigma_p \cdots \sigma_{q-2}\ \sigma_{q-1}\ \sigma_{q-2}^{-1} \cdots \sigma_p^{-1}$.

Les tresses $a_{p,q}$

- Définition : On pose $a_{p,q} = \sigma_p \cdots \sigma_{q-2}\ \sigma_{q-1}\ \sigma_{q-2}^{-1} \cdots \sigma_p^{-1}$.

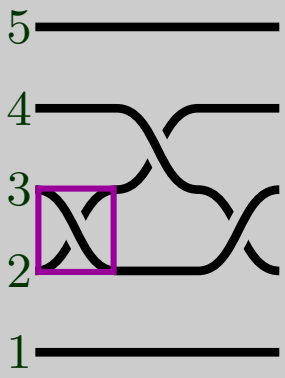
$a_{2,4} \rightsquigarrow$



Les tresses $a_{p,q}$

- Définition : On pose $a_{p,q} = \sigma_p \cdots \sigma_{q-2}\ \sigma_{q-1}\ \sigma_{q-2}^{-1} \cdots \sigma_p^{-1}$.

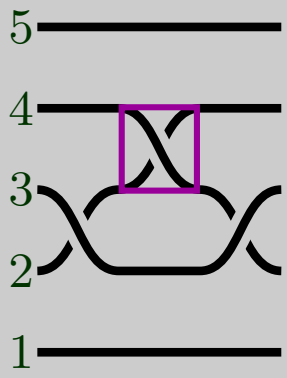
$a_{2,4} \rightsquigarrow$



Les tresses $a_{p,q}$

- Définition : On pose $a_{p,q} = \sigma_p \cdots \sigma_{q-2}\ \sigma_{q-1}\ \sigma_{q-2}^{-1} \cdots \sigma_p^{-1}$.

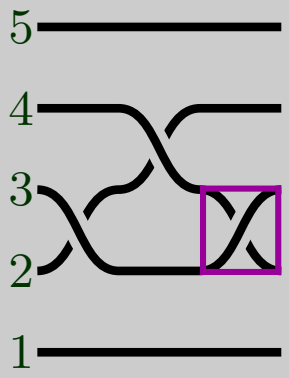
$a_{2,4} \rightsquigarrow$



Les tresses $a_{p,q}$

- Définition : On pose $a_{p,q} = \sigma_p \cdots \sigma_{q-2}\ \sigma_{q-1}\ \sigma_{q-2}^{-1} \cdots \sigma_p^{-1}$.

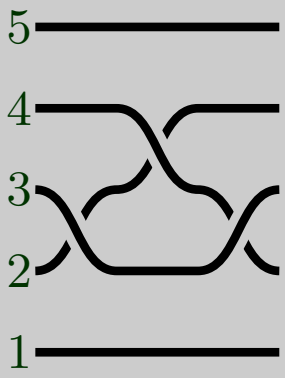
$a_{2,4} \rightsquigarrow$



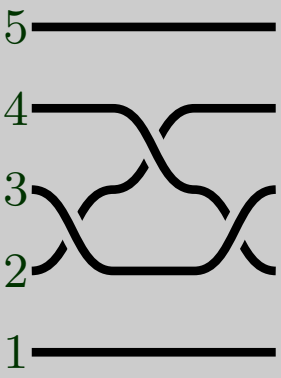
Les tresses $a_{p,q}$

- Définition : On pose $a_{p,q} = \sigma_p \cdots \sigma_{q-2}\ \sigma_{q-1}\ \sigma_{q-2}^{-1} \cdots \sigma_p^{-1}$.

$a_{2,4} \rightsquigarrow$



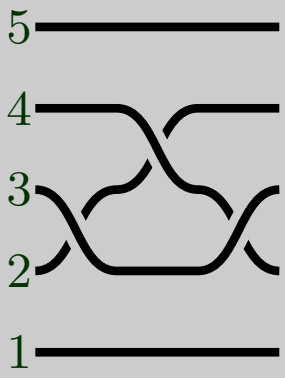
$\approx$



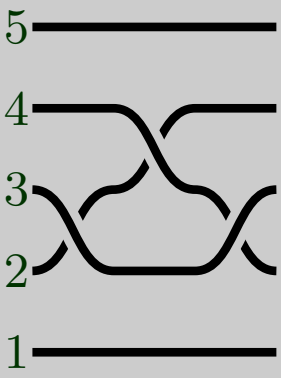
Les tresses $a_{p,q}$

- Définition : On pose $a_{p,q} = \sigma_p \cdots \sigma_{q-2}\ \sigma_{q-1}\ \sigma_{q-2}^{-1} \cdots \sigma_p^{-1}$.

$a_{2,4} \rightsquigarrow$



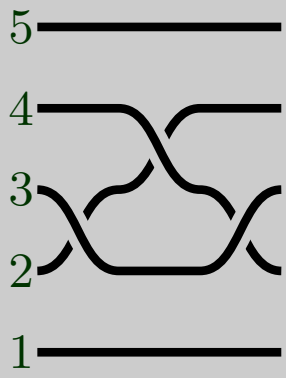
$\approx$



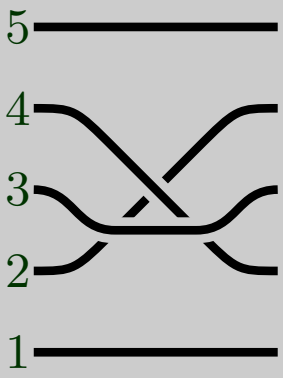
Les tresses $a_{p,q}$

- Définition : On pose $a_{p,q} = \sigma_p \cdots \sigma_{q-2}\ \sigma_{q-1}\ \sigma_{q-2}^{-1} \cdots \sigma_p^{-1}$.

$a_{2,4} \rightsquigarrow$

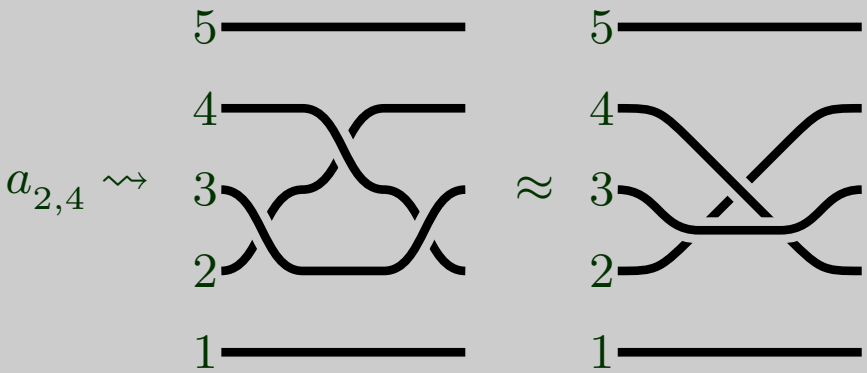


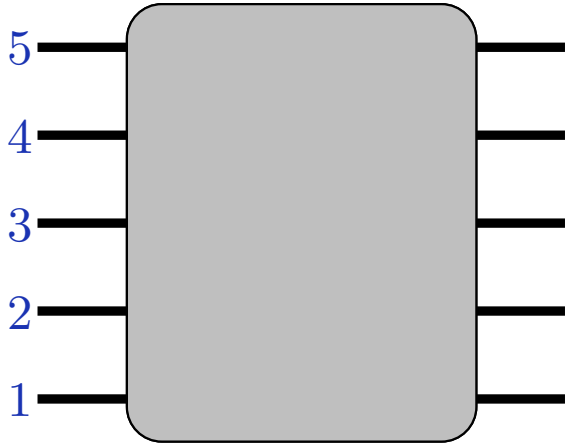
$\approx$



Les tresses $a_{p,q}$

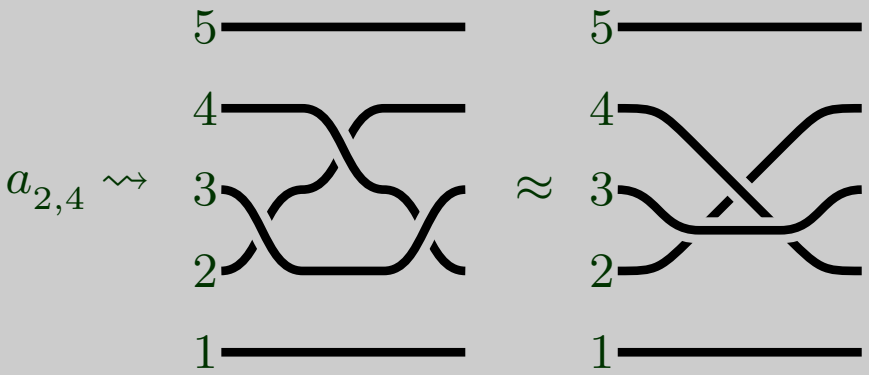
- **Définition :** On pose $a_{p,q} = \sigma_p \cdots \sigma_{q-2}\ \sigma_{q-1}\ \sigma_{q-2}^{-1} \cdots \sigma_p^{-1}$.

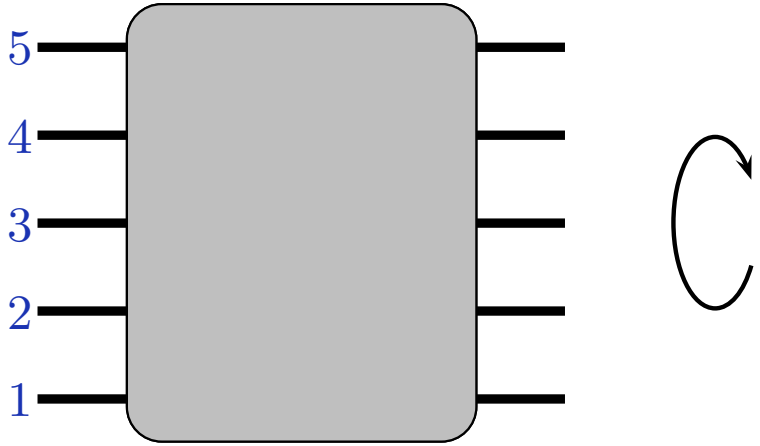




Les tresses $a_{p,q}$

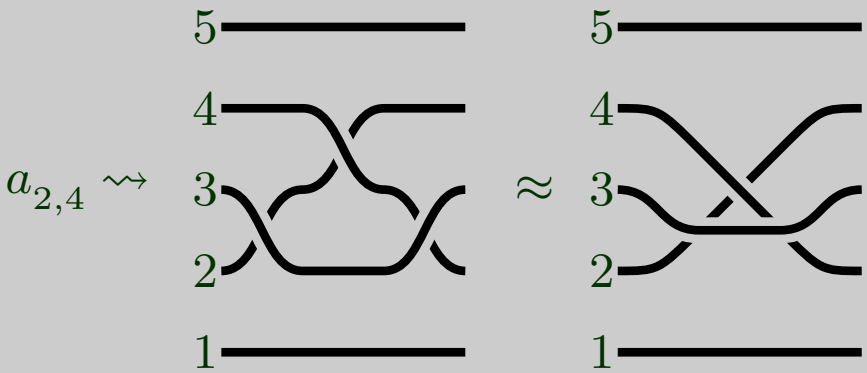
- **Définition :** On pose $a_{p,q} = \sigma_p \cdots \sigma_{q-2}\ \sigma_{q-1}\ \sigma_{q-2}^{-1} \cdots \sigma_p^{-1}$.

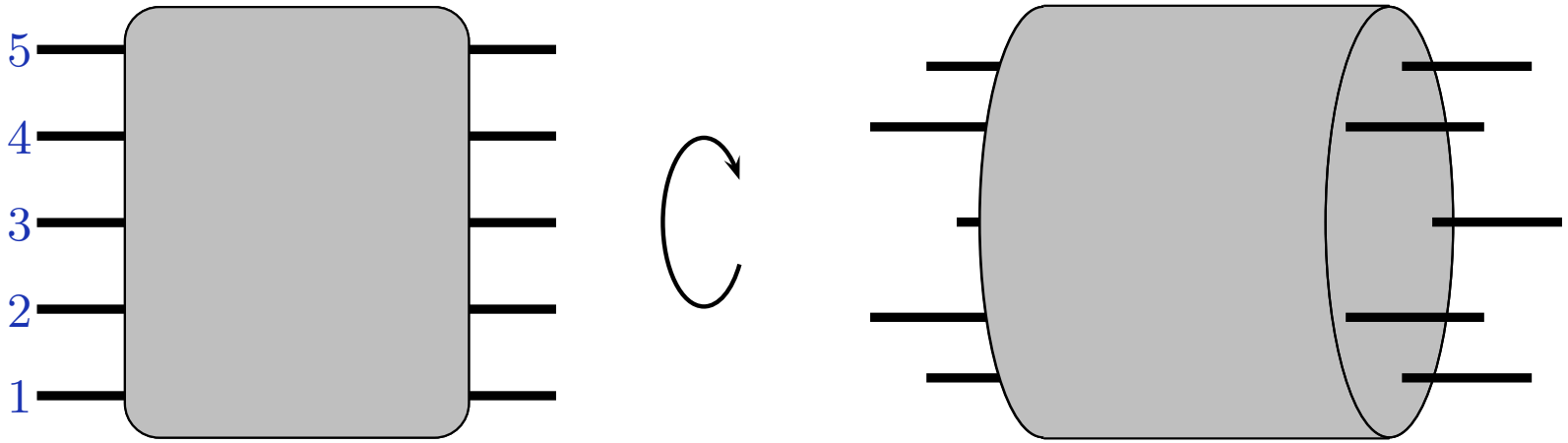




Les tresses $a_{p,q}$

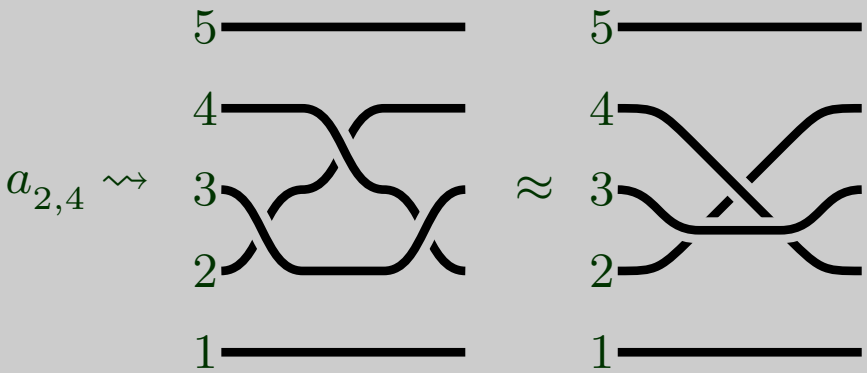
- **Définition :** On pose $a_{p,q} = \sigma_p \cdots \sigma_{q-2}\ \sigma_{q-1}\ \sigma_{q-2}^{-1} \cdots \sigma_p^{-1}$.

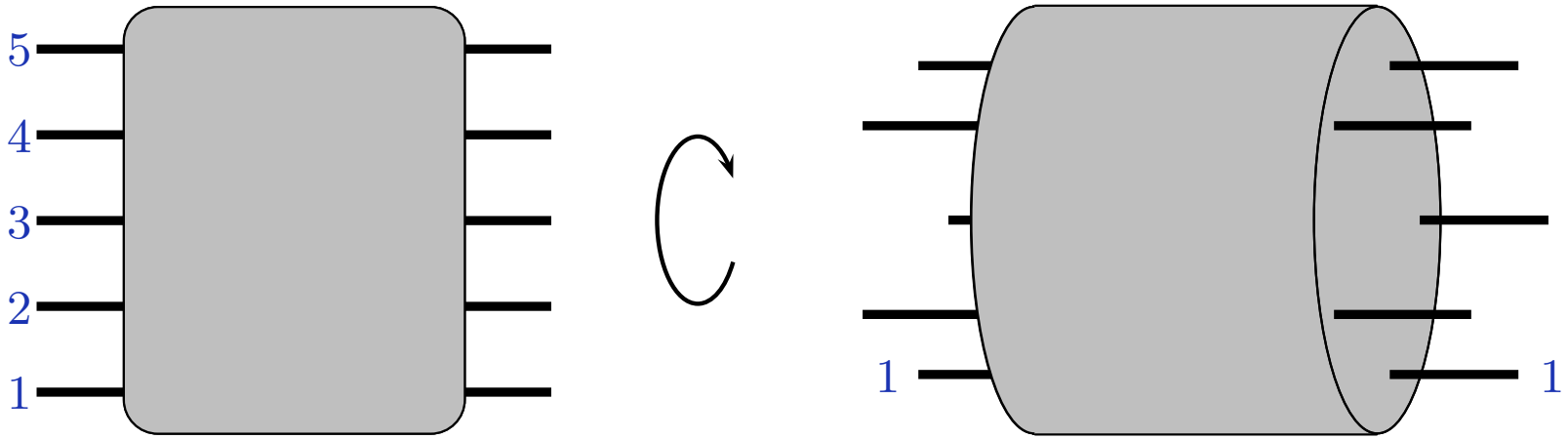




Les tresses $a_{p,q}$

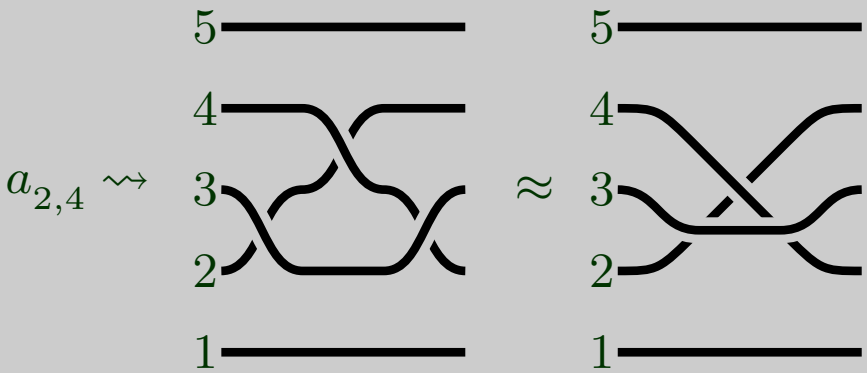
- **Définition :** On pose $a_{p,q} = \sigma_p \cdots \sigma_{q-2}\ \sigma_{q-1}\ \sigma_{q-2}^{-1} \cdots \sigma_p^{-1}$.

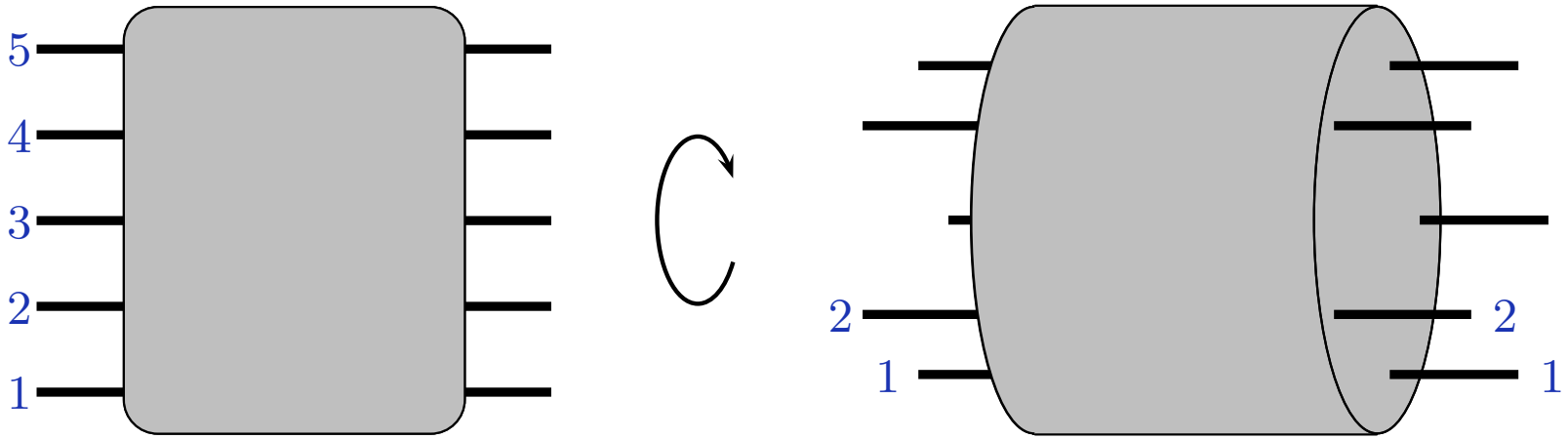




Les tresses $a_{p,q}$

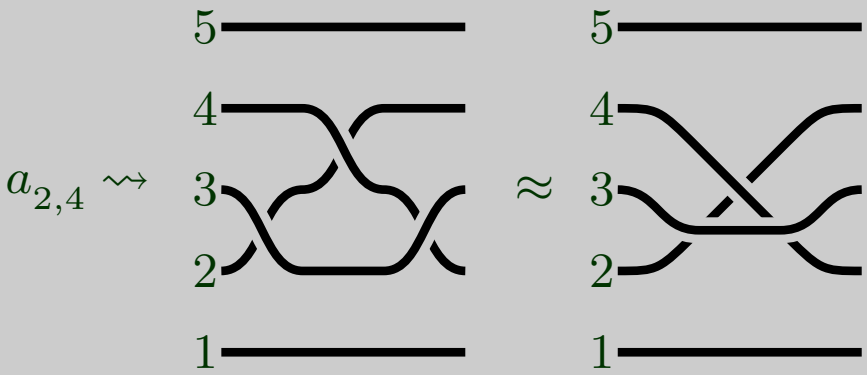
- **Définition :** On pose $a_{p,q} = \sigma_p \cdots \sigma_{q-2}\ \sigma_{q-1}\ \sigma_{q-2}^{-1} \cdots \sigma_p^{-1}$.

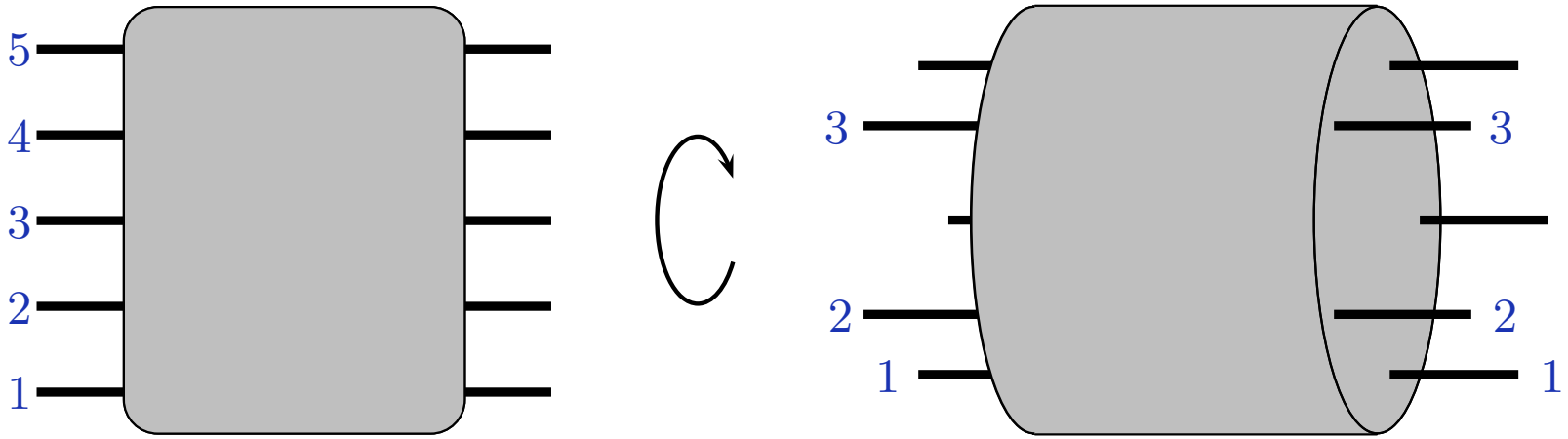




Les tresses $a_{p,q}$

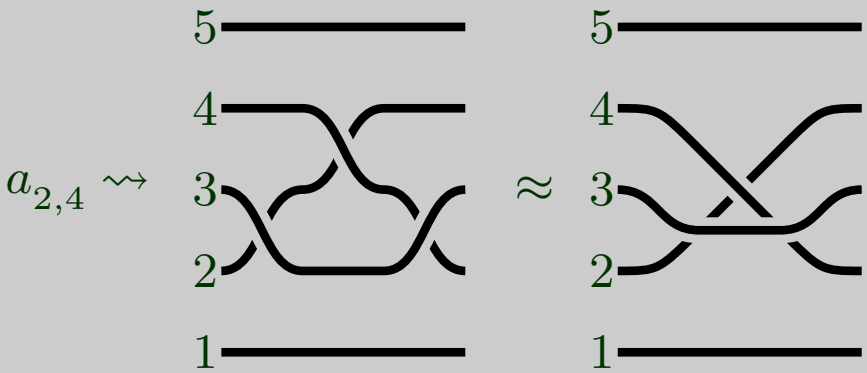
- **Définition :** On pose $a_{p,q} = \sigma_p \cdots \sigma_{q-2}\ \sigma_{q-1}\ \sigma_{q-2}^{-1} \cdots \sigma_p^{-1}$.

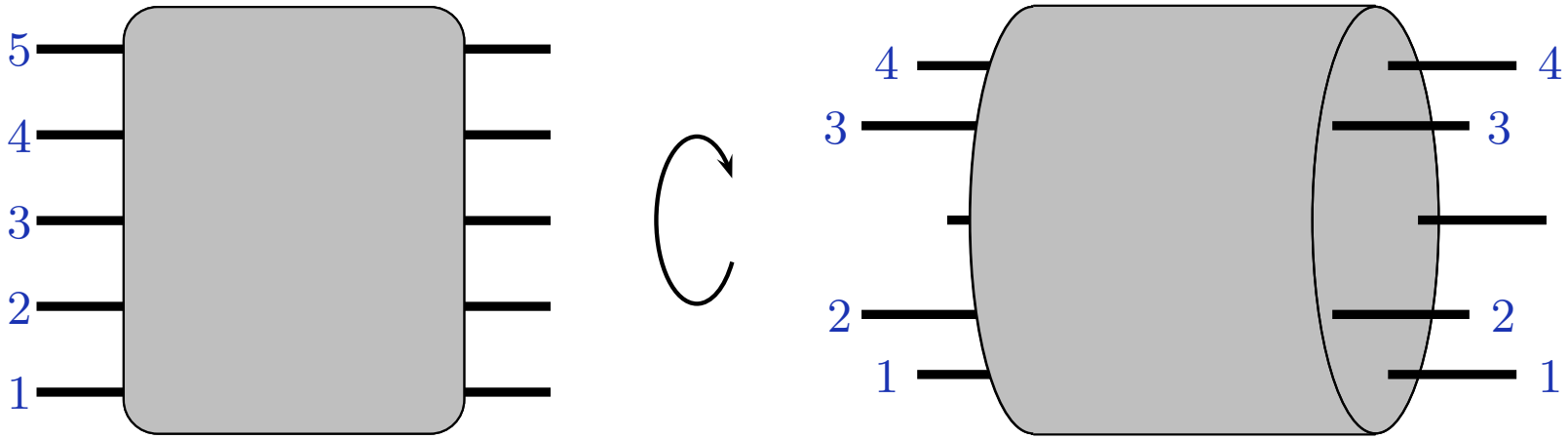




Les tresses $a_{p,q}$

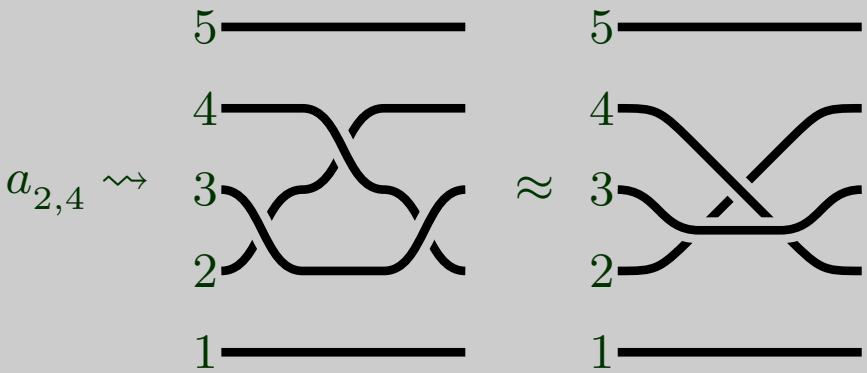
- **Définition :** On pose $a_{p,q} = \sigma_p \cdots \sigma_{q-2}\ \sigma_{q-1}\ \sigma_{q-2}^{-1} \cdots \sigma_p^{-1}$.

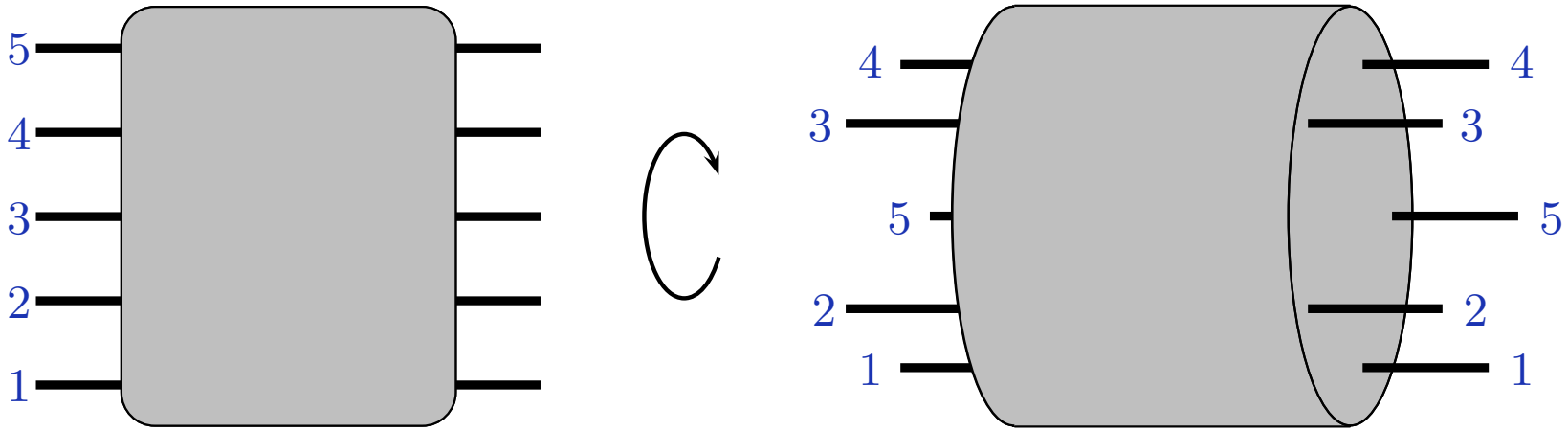




Les tresses $a_{p,q}$

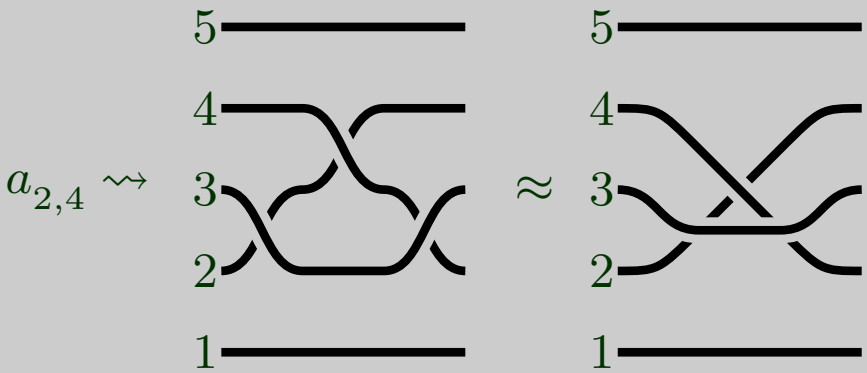
- **Définition :** On pose $a_{p,q} = \sigma_p \cdots \sigma_{q-2}\ \sigma_{q-1}\ \sigma_{q-2}^{-1} \cdots \sigma_p^{-1}$.

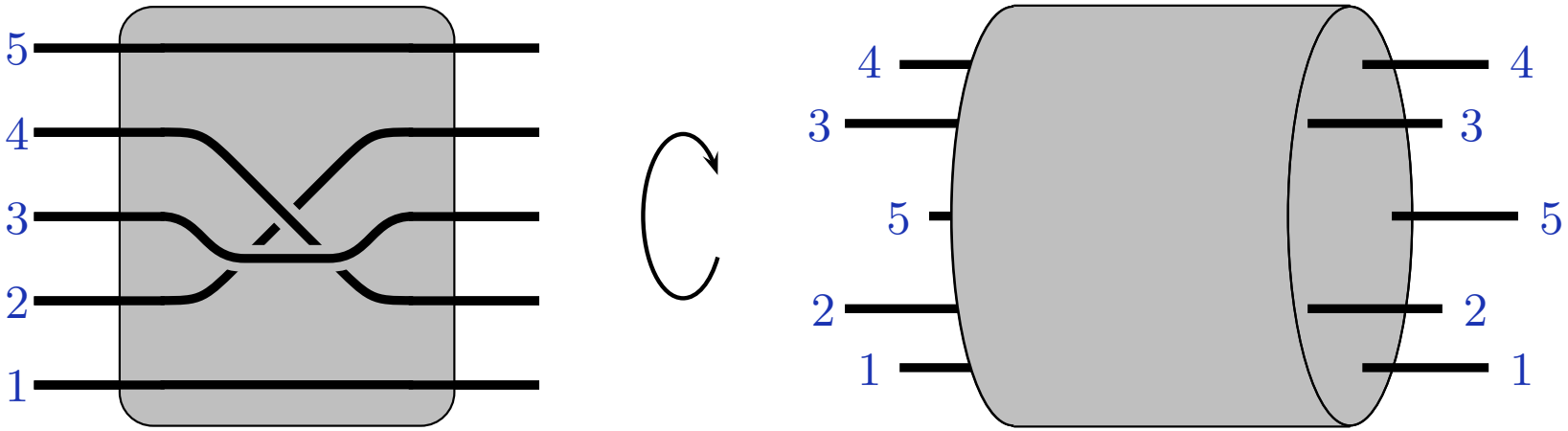




Les tresses $a_{p,q}$

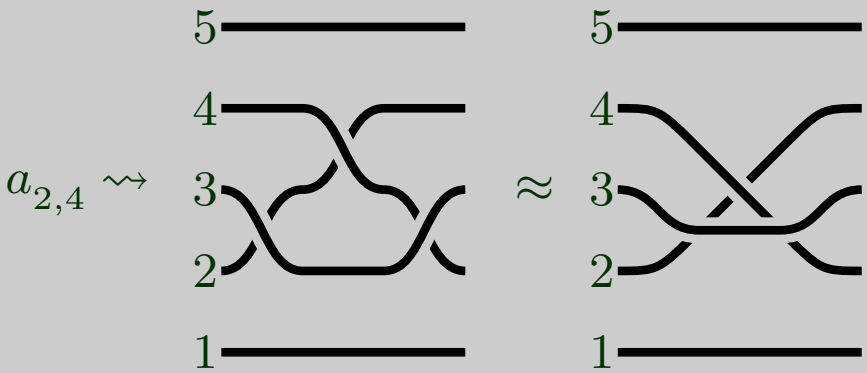
- **Définition :** On pose $a_{p,q} = \sigma_p \cdots \sigma_{q-2}\ \sigma_{q-1}\ \sigma_{q-2}^{-1} \cdots \sigma_p^{-1}$.

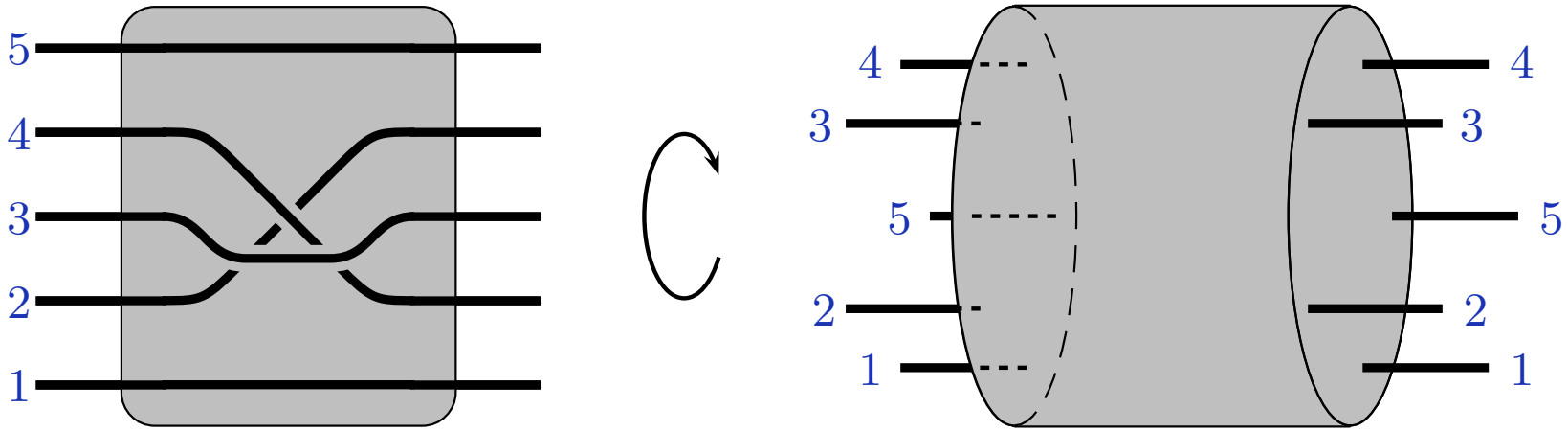




Les tresses $a_{p,q}$

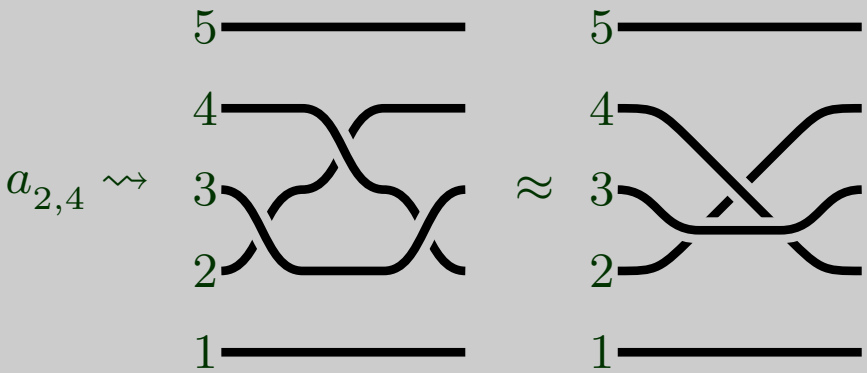
- **Définition :** On pose $a_{p,q} = \sigma_p \cdots \sigma_{q-2}\ \sigma_{q-1}\ \sigma_{q-2}^{-1} \cdots \sigma_p^{-1}$.

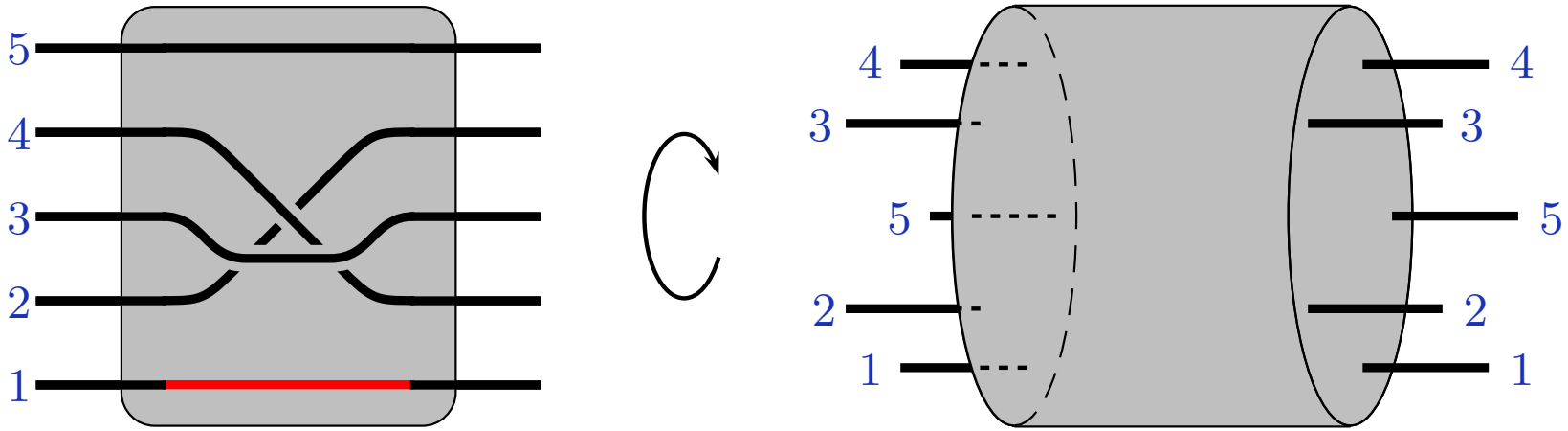




Les tresses $a_{p,q}$

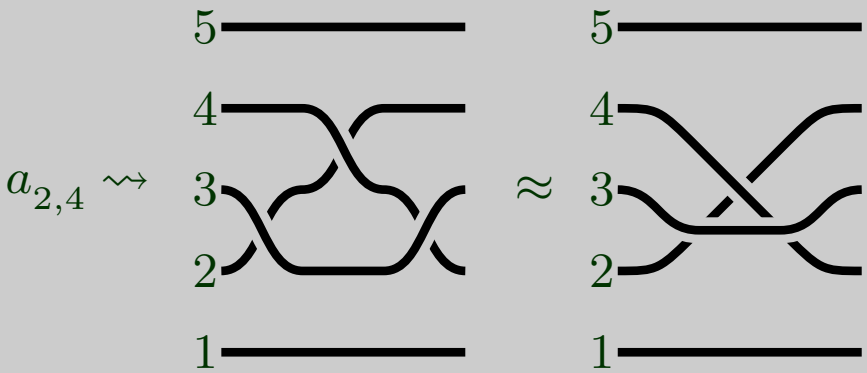
- **Définition :** On pose $a_{p,q} = \sigma_p \cdots \sigma_{q-2}\ \sigma_{q-1}\ \sigma_{q-2}^{-1} \cdots \sigma_p^{-1}$.

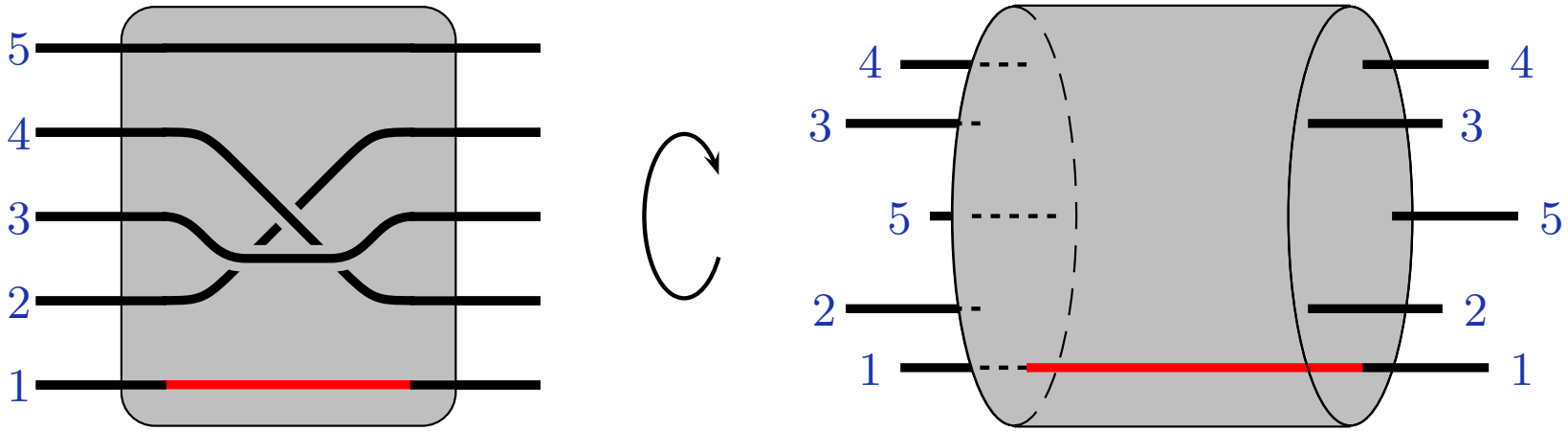




Les tresses $a_{p,q}$

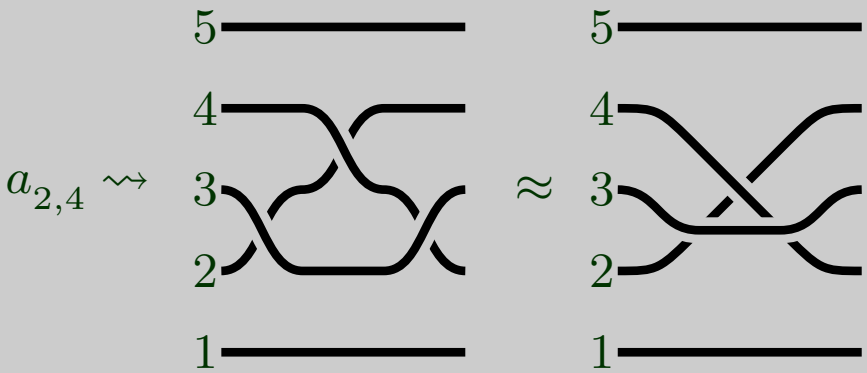
- **Définition :** On pose $a_{p,q} = \sigma_p \cdots \sigma_{q-2}\ \sigma_{q-1}\ \sigma_{q-2}^{-1} \cdots \sigma_p^{-1}$.

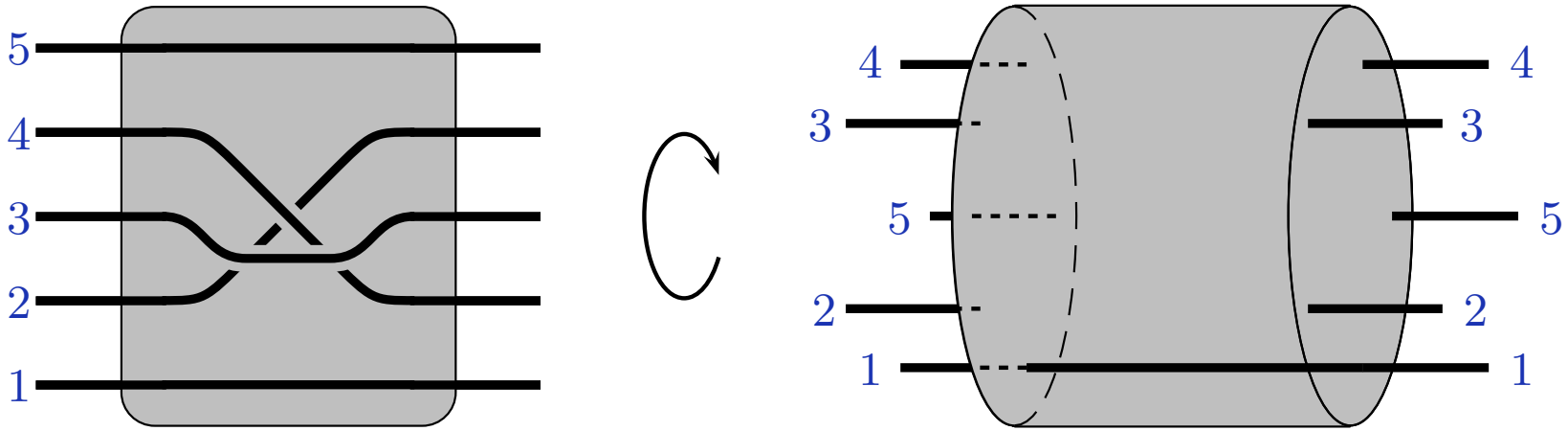




Les tresses $a_{p,q}$

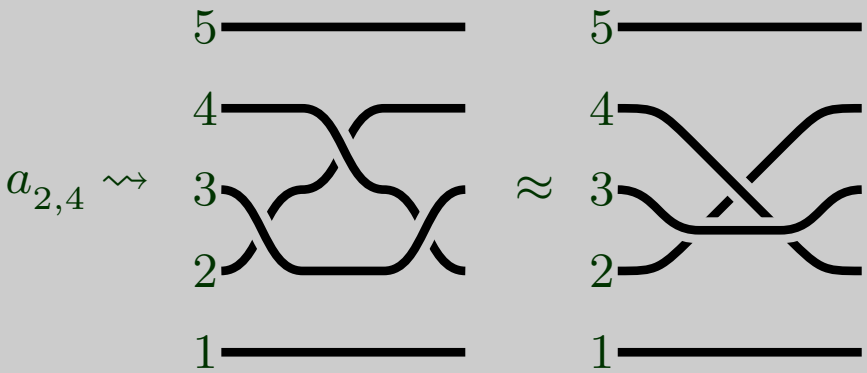
- **Définition :** On pose $a_{p,q} = \sigma_p \cdots \sigma_{q-2}\ \sigma_{q-1}\ \sigma_{q-2}^{-1} \cdots \sigma_p^{-1}$.

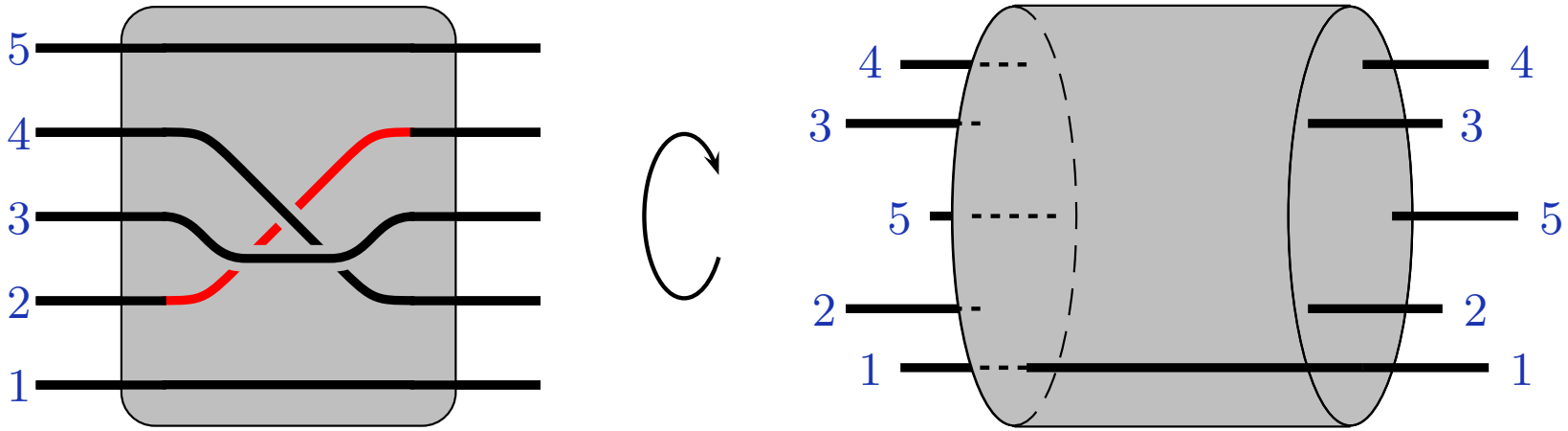




Les tresses $a_{p,q}$

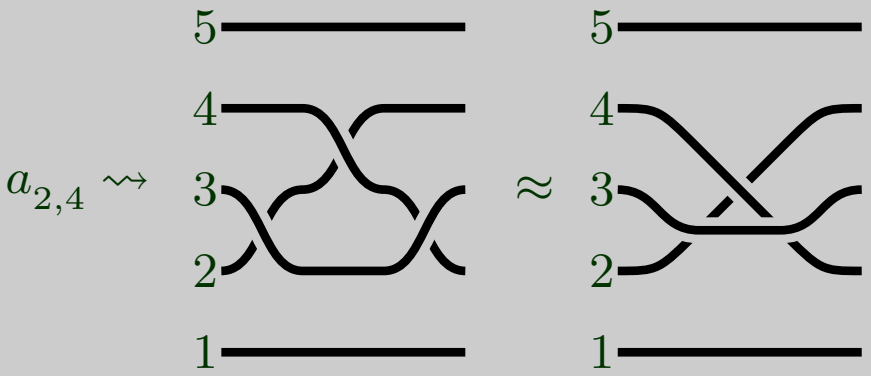
- **Définition :** On pose $a_{p,q} = \sigma_p \cdots \sigma_{q-2}\ \sigma_{q-1}\ \sigma_{q-2}^{-1} \cdots \sigma_p^{-1}$.

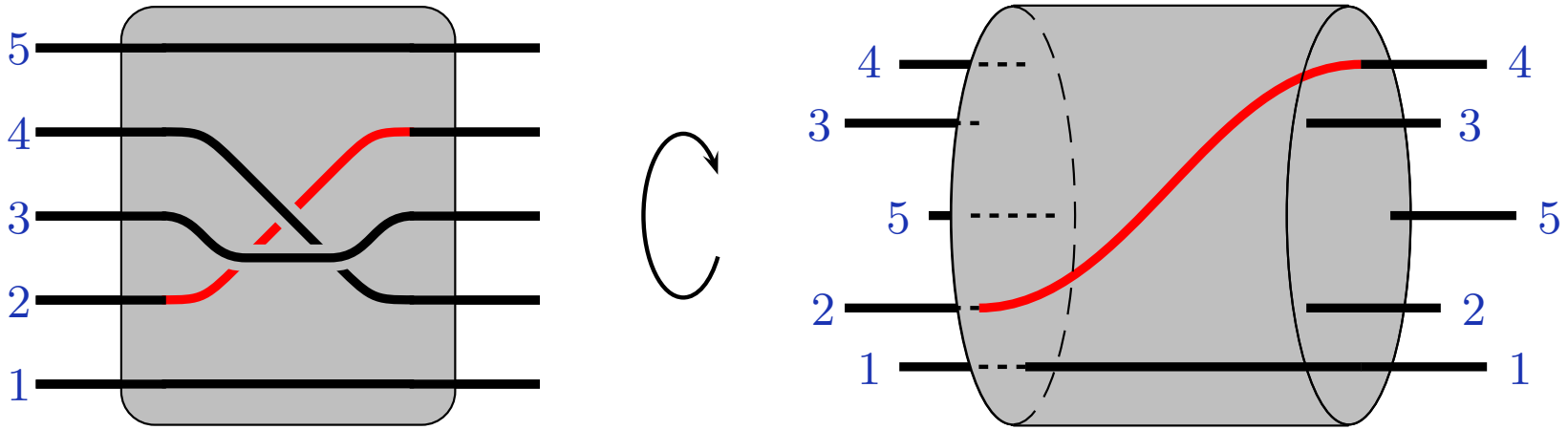




Les tresses $a_{p,q}$

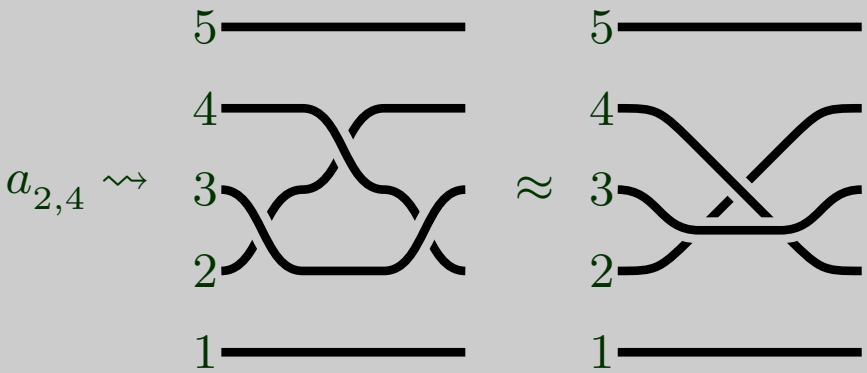
- Définition : On pose $a_{p,q} = \sigma_p \cdots \sigma_{q-2}\ \sigma_{q-1}\ \sigma_{q-2}^{-1} \cdots \sigma_p^{-1}$.

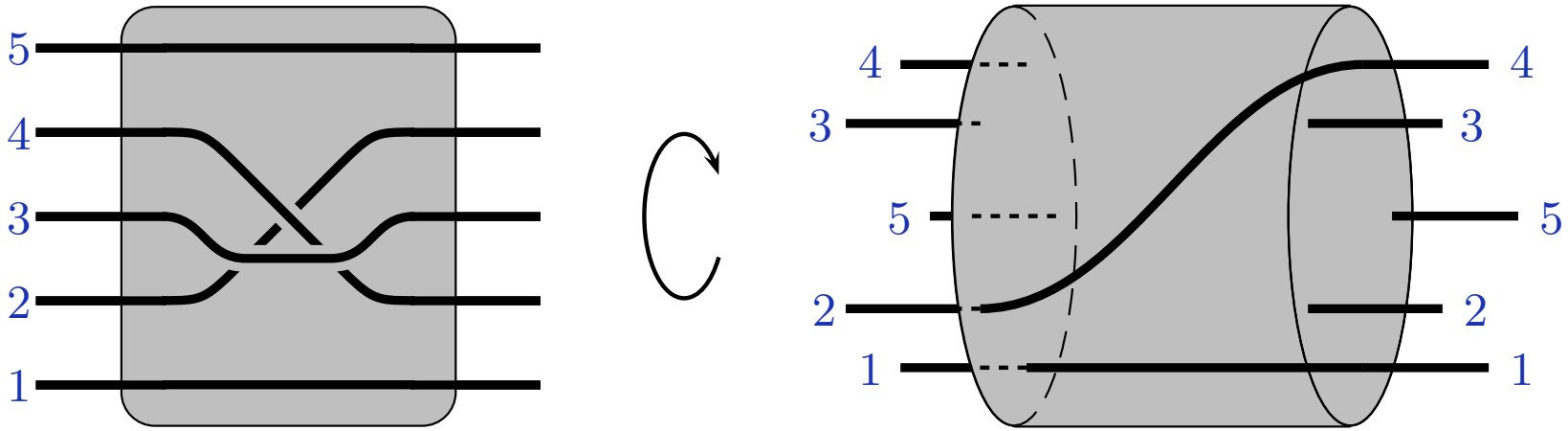




Les tresses $a_{p,q}$

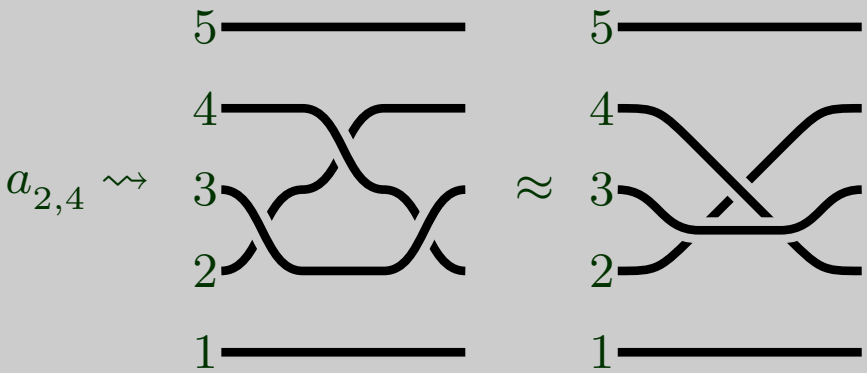
- **Définition :** On pose $a_{p,q} = \sigma_p \cdots \sigma_{q-2}\ \sigma_{q-1}\ \sigma_{q-2}^{-1} \cdots \sigma_p^{-1}$.

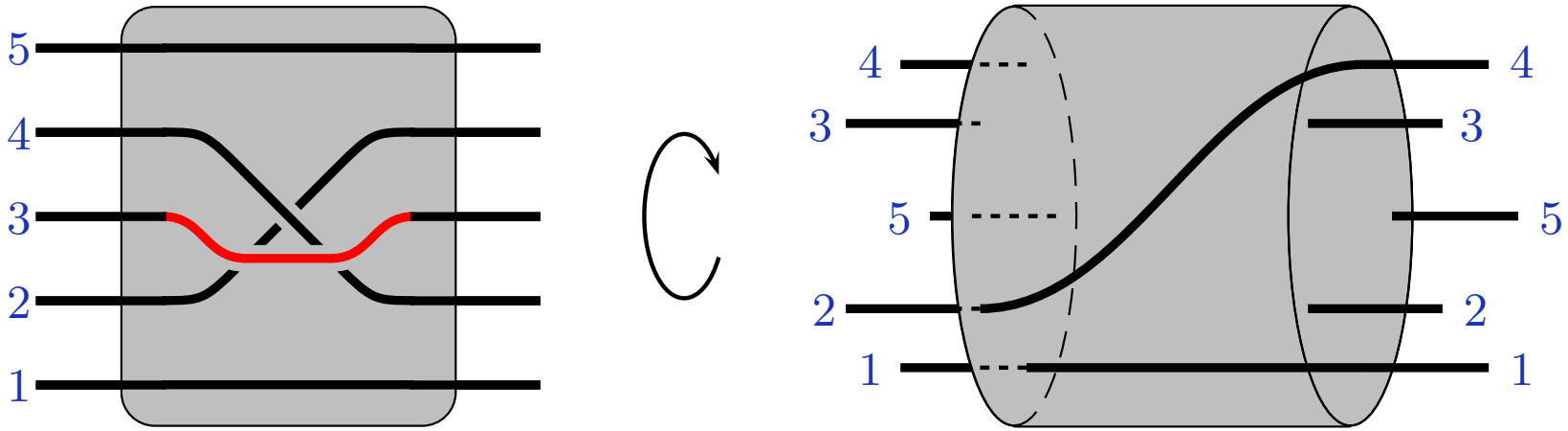




Les tresses $a_{p,q}$

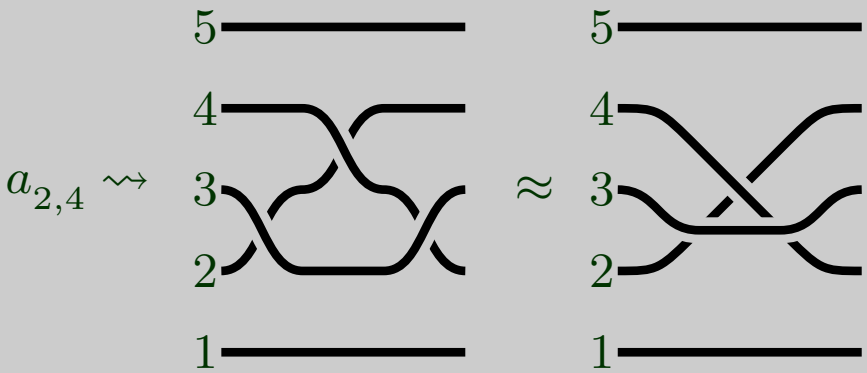
- **Définition :** On pose $a_{p,q} = \sigma_p \cdots \sigma_{q-2}\ \sigma_{q-1}\ \sigma_{q-2}^{-1} \cdots \sigma_p^{-1}$.

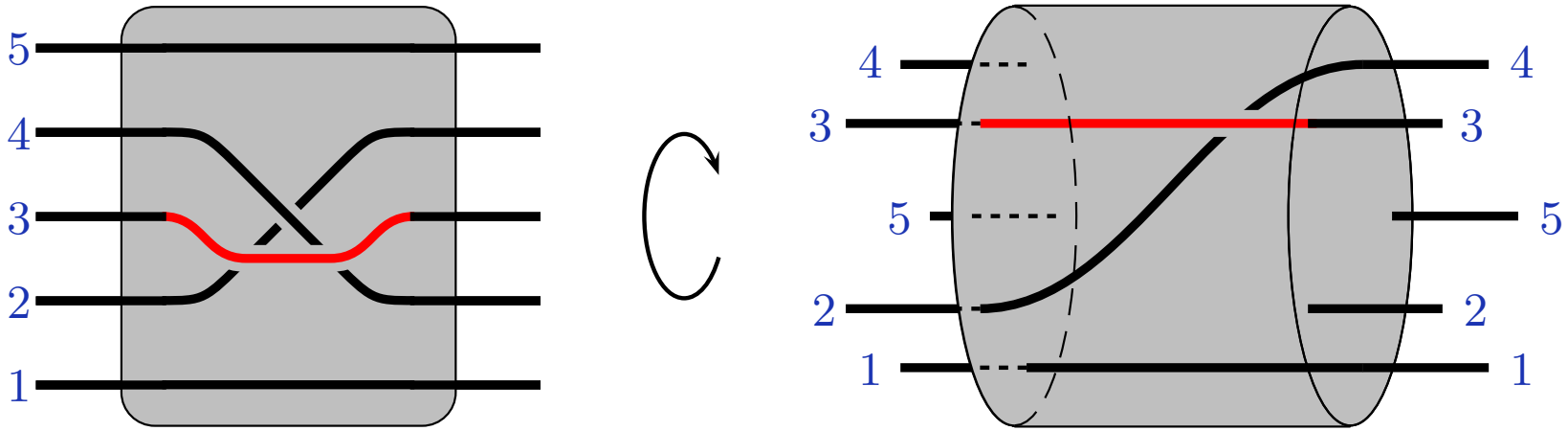




Les tresses $a_{p,q}$

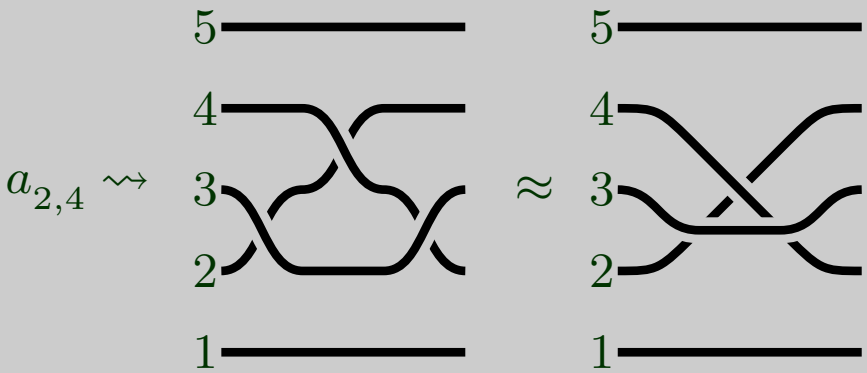
- **Définition :** On pose $a_{p,q} = \sigma_p \cdots \sigma_{q-2}\ \sigma_{q-1}\ \sigma_{q-2}^{-1} \cdots \sigma_p^{-1}$.

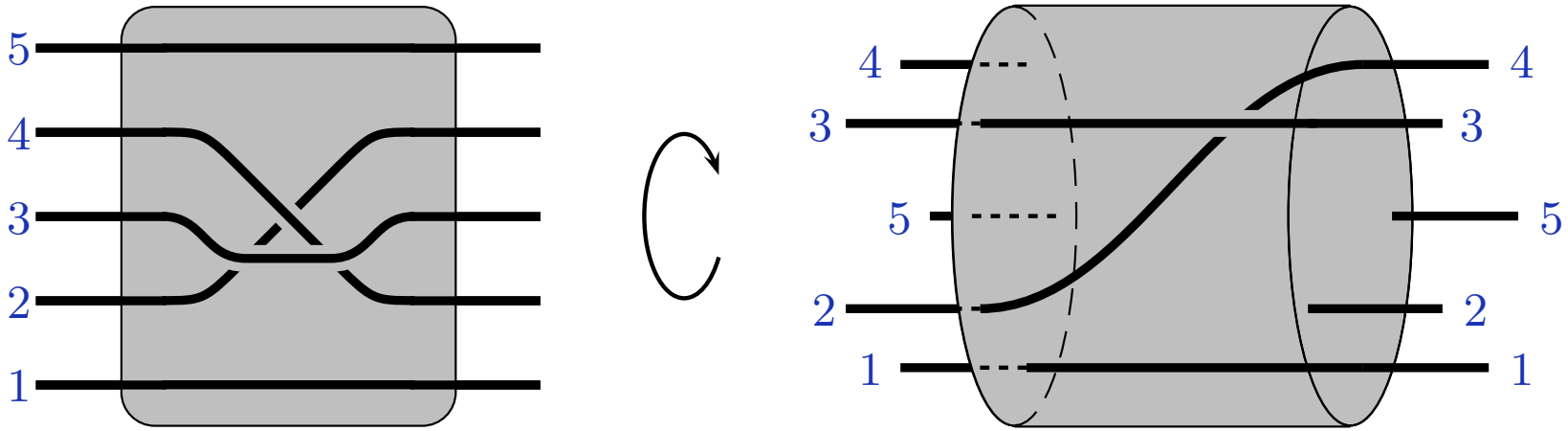




Les tresses $a_{p,q}$

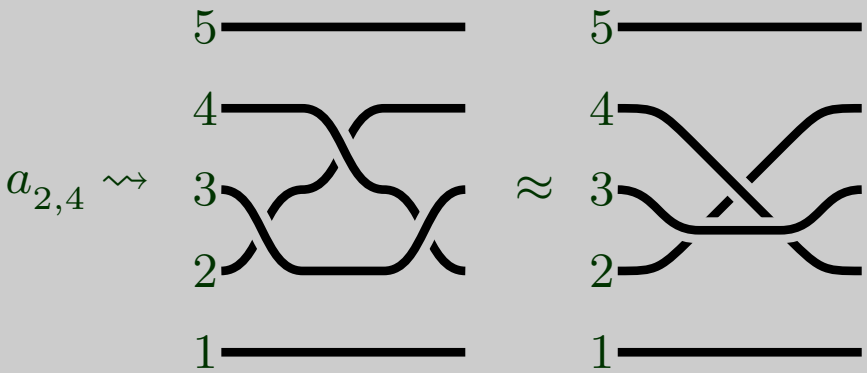
- **Définition :** On pose $a_{p,q} = \sigma_p \cdots \sigma_{q-2}\ \sigma_{q-1}\ \sigma_{q-2}^{-1} \cdots \sigma_p^{-1}$.

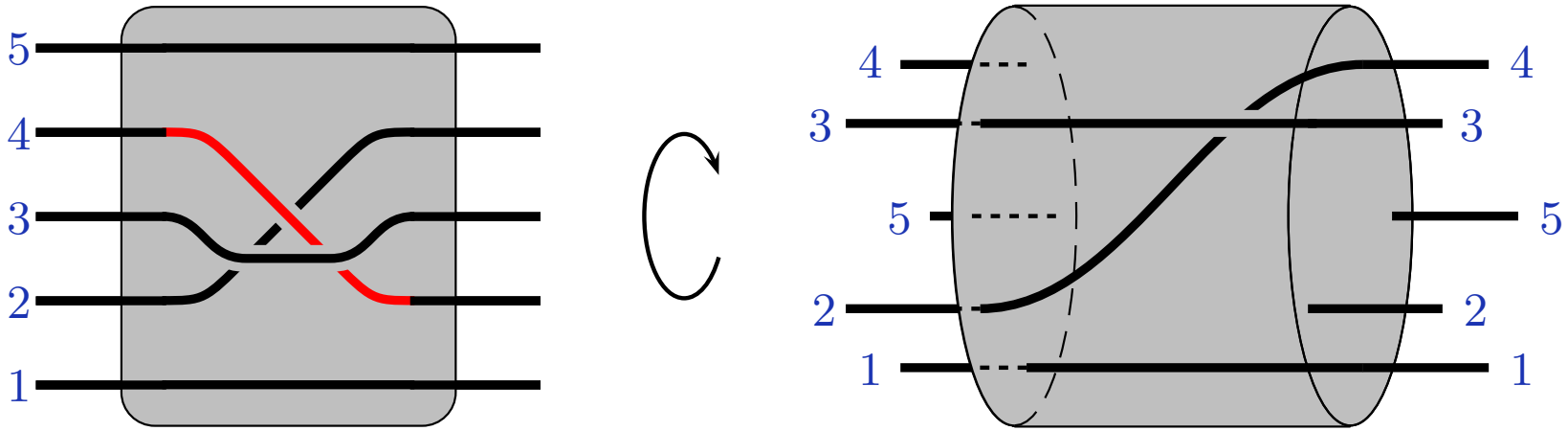




Les tresses $a_{p,q}$

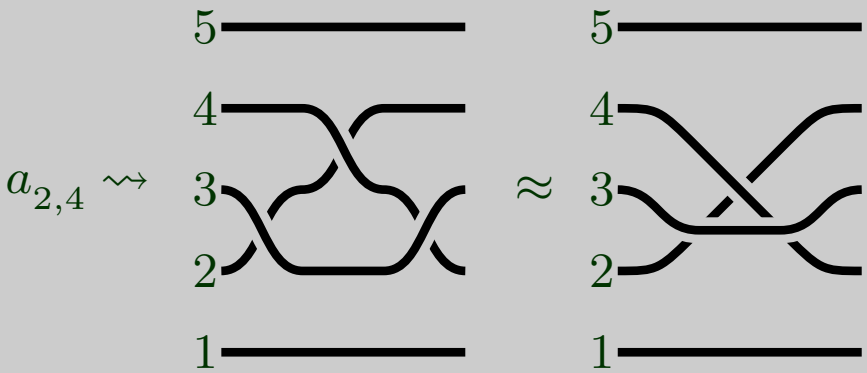
- **Définition :** On pose $a_{p,q} = \sigma_p \cdots \sigma_{q-2}\ \sigma_{q-1}\ \sigma_{q-2}^{-1} \cdots \sigma_p^{-1}$.

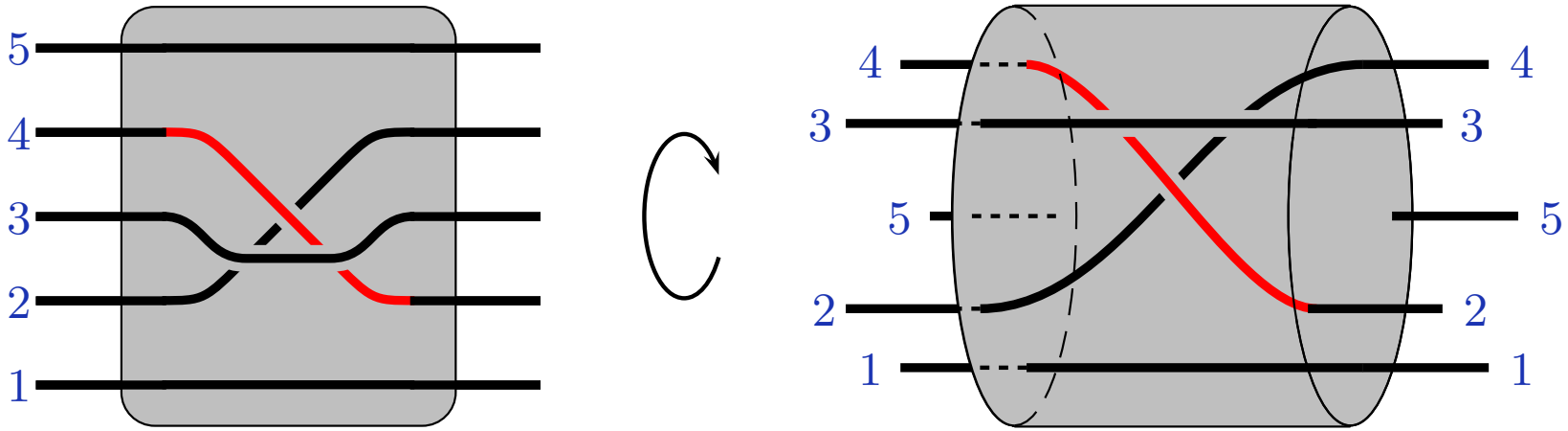




Les tresses $a_{p,q}$

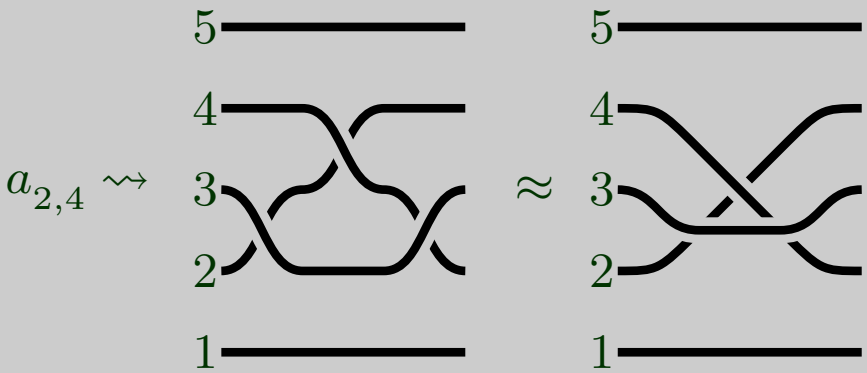
- **Définition :** On pose $a_{p,q} = \sigma_p \cdots \sigma_{q-2}\ \sigma_{q-1}\ \sigma_{q-2}^{-1} \cdots \sigma_p^{-1}$.

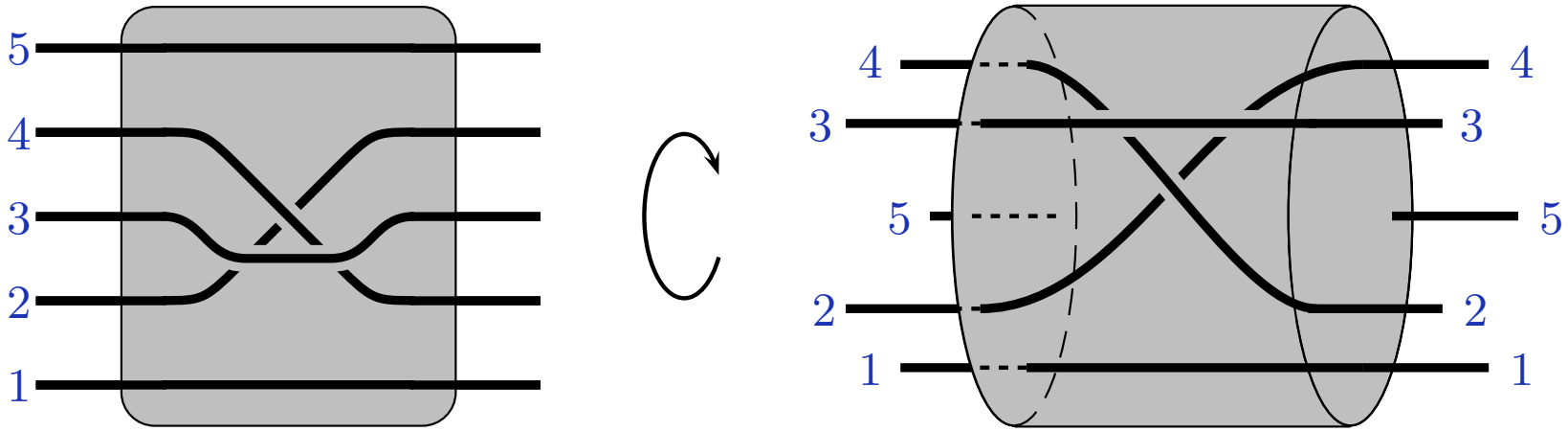




Les tresses $a_{p,q}$

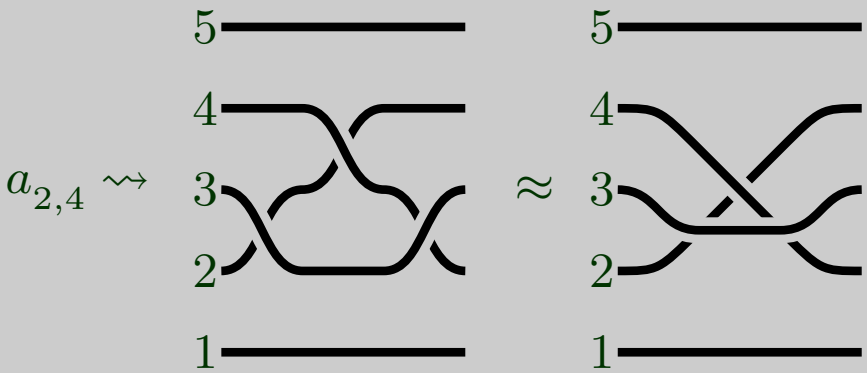
- **Définition :** On pose $a_{p,q} = \sigma_p \cdots \sigma_{q-2}\ \sigma_{q-1}\ \sigma_{q-2}^{-1} \cdots \sigma_p^{-1}$.

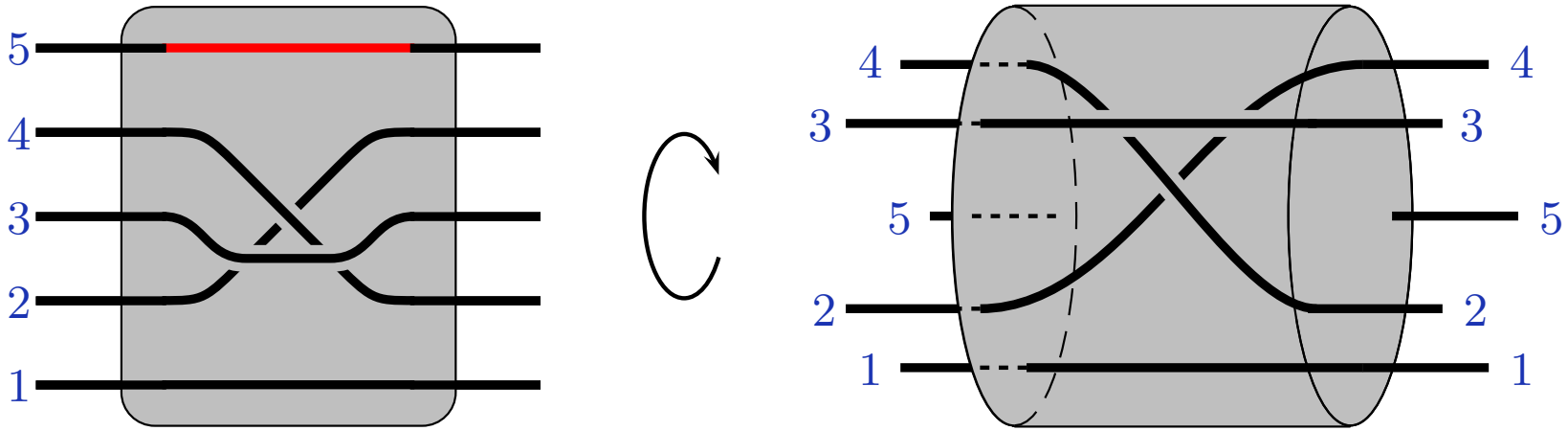




Les tresses $a_{p,q}$

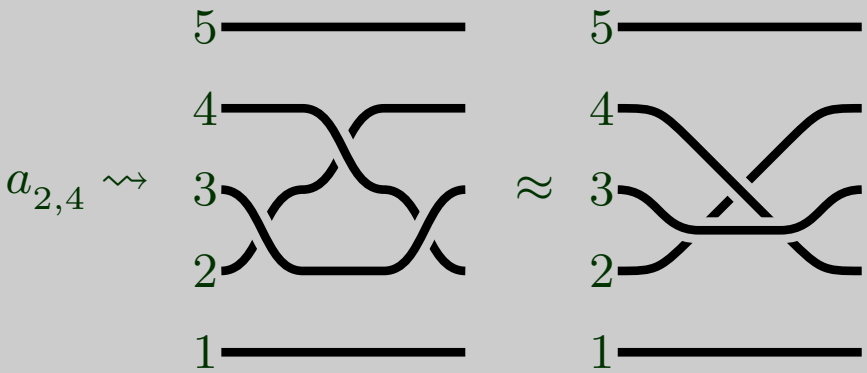
- Définition : On pose $a_{p,q} = \sigma_p \cdots \sigma_{q-2}\ \sigma_{q-1}\ \sigma_{q-2}^{-1} \cdots \sigma_p^{-1}$.

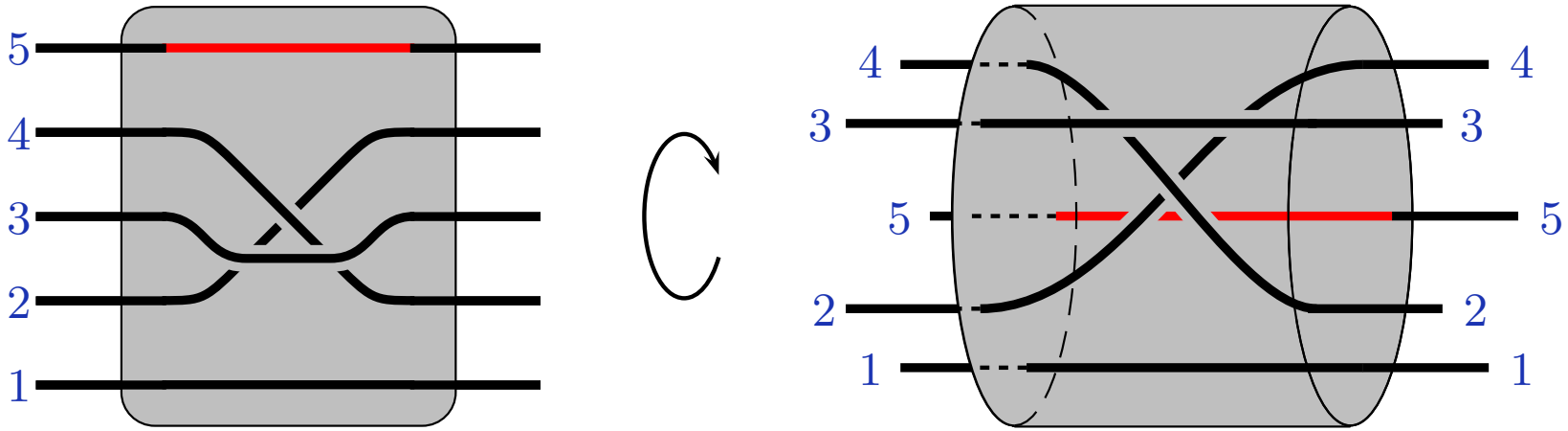




Les tresses $a_{p,q}$

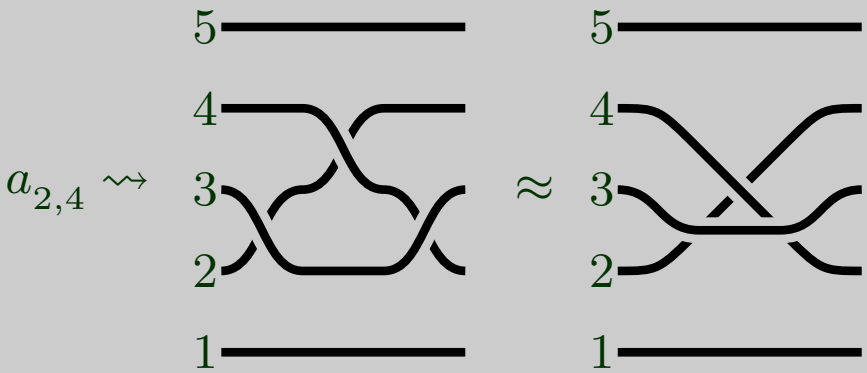
- **Définition :** On pose $a_{p,q} = \sigma_p \cdots \sigma_{q-2}\ \sigma_{q-1}\ \sigma_{q-2}^{-1} \cdots \sigma_p^{-1}$.

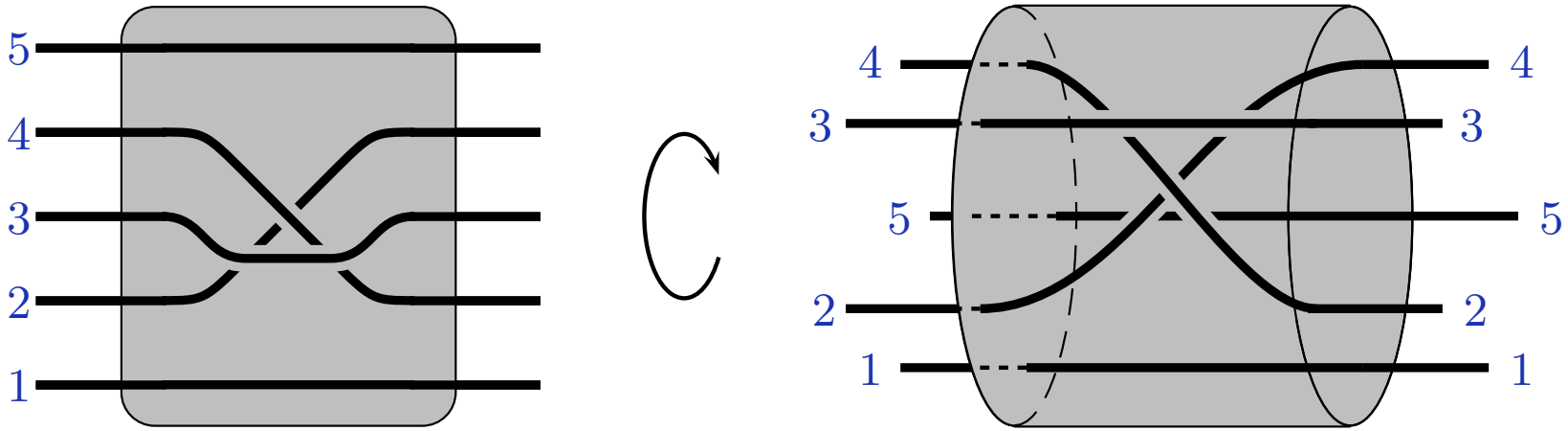




Les tresses $a_{p,q}$

- **Définition :** On pose $a_{p,q} = \sigma_p \cdots \sigma_{q-2}\ \sigma_{q-1}\ \sigma_{q-2}^{-1} \cdots \sigma_p^{-1}$.





Relations entre les tresses $a_{p,q}$

- Fait : Les tresses $a_{p,q}$ satisfont les relations $\mathcal{R}_n$:

Relations entre les tresses $a_{p,q}$

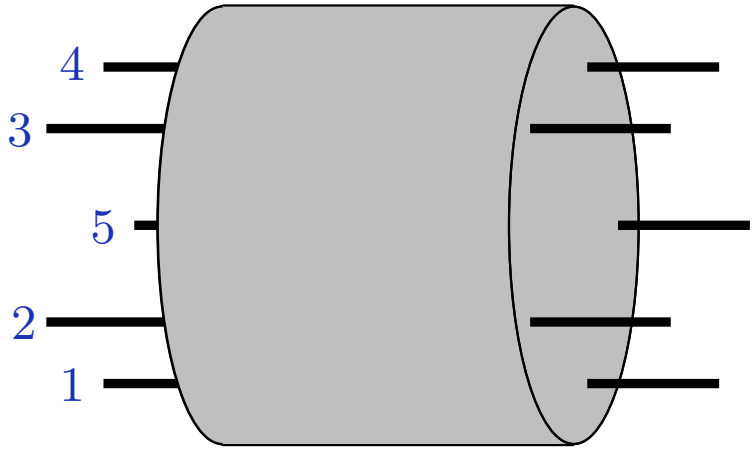
- Fait : Les tresses $a_{p,q}$ satisfont les relations $\mathcal{R}_n$:
  - $a_{p,q}a_{r,s} = a_{r,s}a_{p,q}$ pour $(p-r)(p-s)(q-r)(q-s) > 0$,

Relations entre les tresses $a_{p,q}$

- Fait : Les tresses $a_{p,q}$ satisfont les relations $\mathcal{R}_n$:
  - $a_{p,q}a_{r,s} = a_{r,s}a_{p,q}$ pour $(p-r)(p-s)(q-r)(q-s) > 0$,
  - $a_{p,q}a_{q,r} = a_{q,r}a_{p,r} = a_{p,r}a_{p,q}$ pour $1 \leqslant p < q < r \leqslant n$.

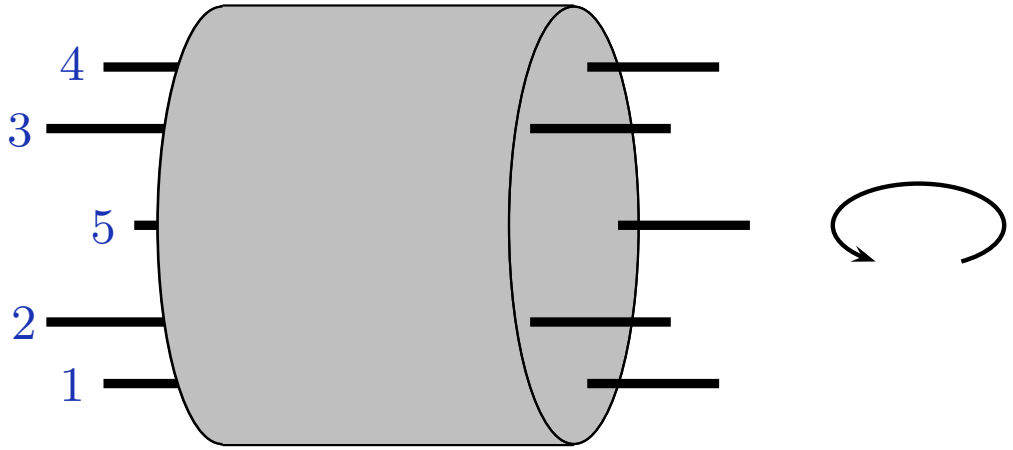
Relations entre les tresses $a_{p,q}$

- Fait : Les tresses $a_{p,q}$ satisfont les relations $\mathcal{R}_n$:
  - $a_{p,q}a_{r,s} = a_{r,s}a_{p,q}$ pour $(p-r)(p-s)(q-r)(q-s) > 0$,
  - $a_{p,q}a_{q,r} = a_{q,r}a_{p,r} = a_{p,r}a_{p,q}$ pour $1 \leqslant p < q < r \leqslant n$.



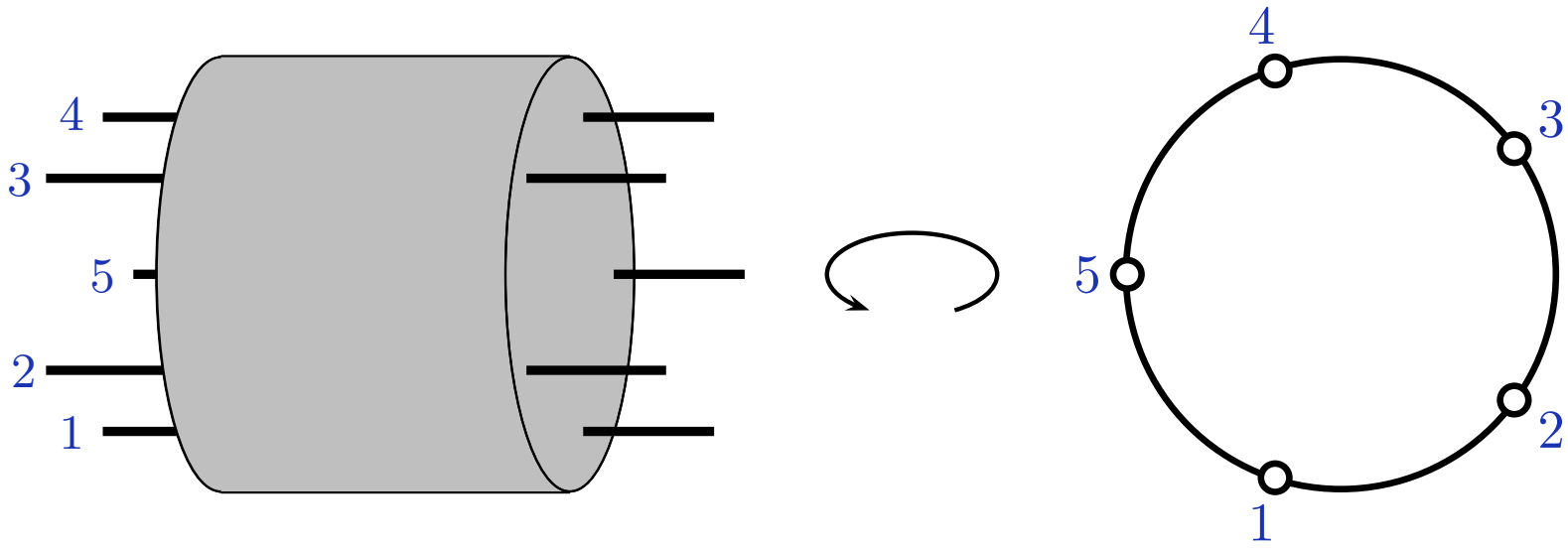
Relations entre les tresses $a_{p,q}$

- Fait : Les tresses $a_{p,q}$ satisfont les relations $\mathcal{R}_n$:
  - $a_{p,q}a_{r,s} = a_{r,s}a_{p,q}$ pour $(p-r)(p-s)(q-r)(q-s) > 0$,
  - $a_{p,q}a_{q,r} = a_{q,r}a_{p,r} = a_{p,r}a_{p,q}$ pour $1 \leqslant p < q < r \leqslant n$.



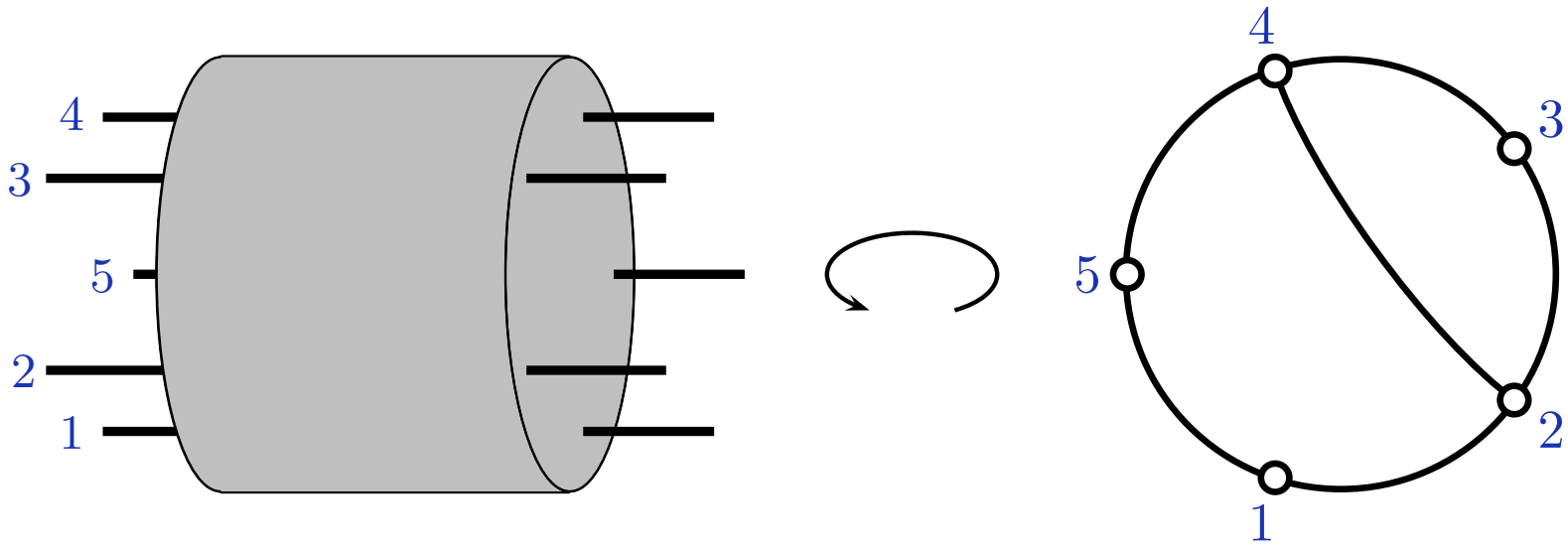
Relations entre les tresses $a_{p,q}$

- Fait : Les tresses $a_{p,q}$ satisfont les relations $\mathcal{R}_n$:
  - $a_{p,q}a_{r,s} = a_{r,s}a_{p,q}$ pour $(p-r)(p-s)(q-r)(q-s) > 0$,
  - $a_{p,q}a_{q,r} = a_{q,r}a_{p,r} = a_{p,r}a_{p,q}$ pour $1 \leqslant p < q < r \leqslant n$.



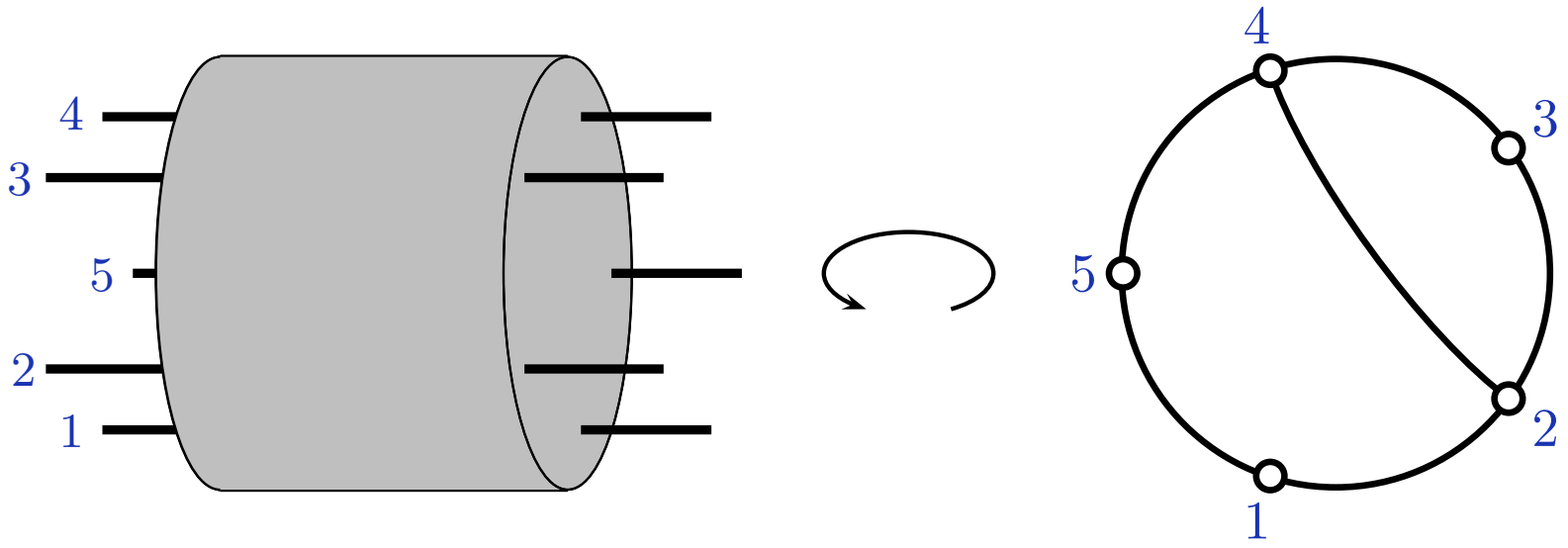
Relations entre les tresses $a_{p,q}$

- Fait : Les tresses $a_{p,q}$ satisfont les relations $\mathcal{R}_n$:
  - $a_{p,q}a_{r,s} = a_{r,s}a_{p,q}$ pour $(p-r)(p-s)(q-r)(q-s) > 0$,
  - $a_{p,q}a_{q,r} = a_{q,r}a_{p,r} = a_{p,r}a_{p,q}$ pour $1 \leqslant p < q < r \leqslant n$.



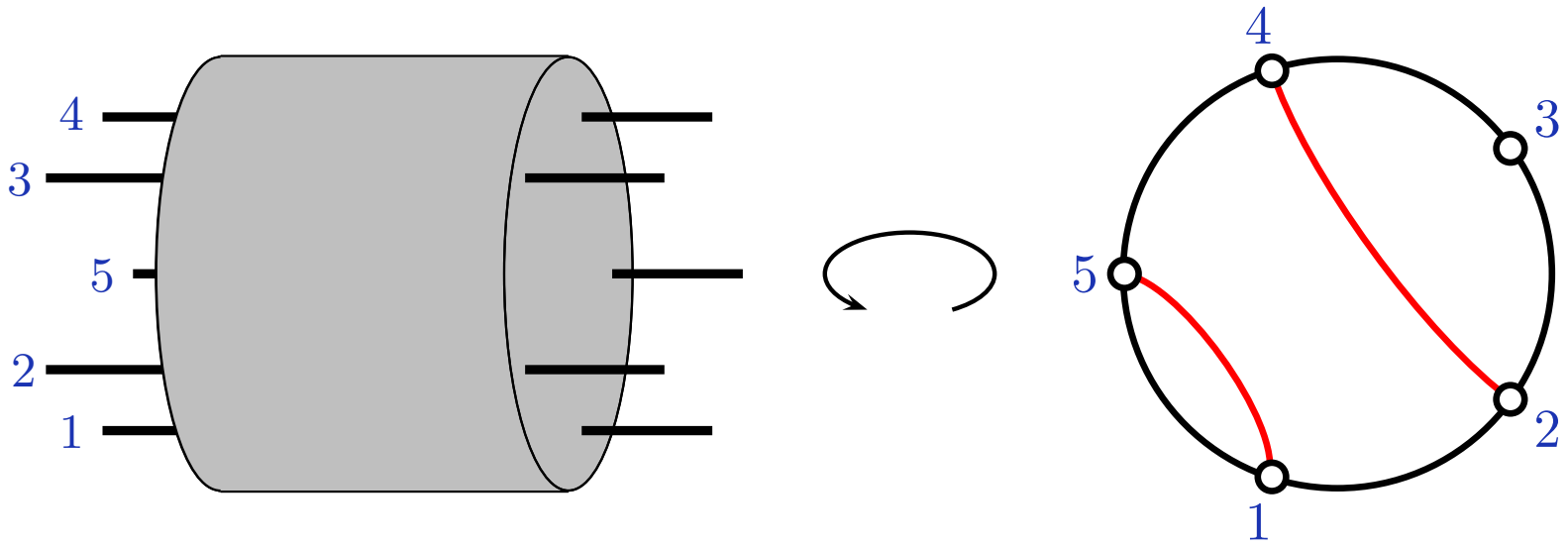
Relations entre les tresses $a_{p,q}$

- Fait : Les tresses $a_{p,q}$ satisfont les relations $\mathcal{R}_n$:
  - $a_{p,q}a_{r,s} = a_{r,s}a_{p,q}$ pour $(p-r)(p-s)(q-r)(q-s) > 0$,
  - $a_{p,q}a_{q,r} = a_{q,r}a_{p,r} = a_{p,r}a_{p,q}$ pour $1 \leqslant p < q < r \leqslant n$.



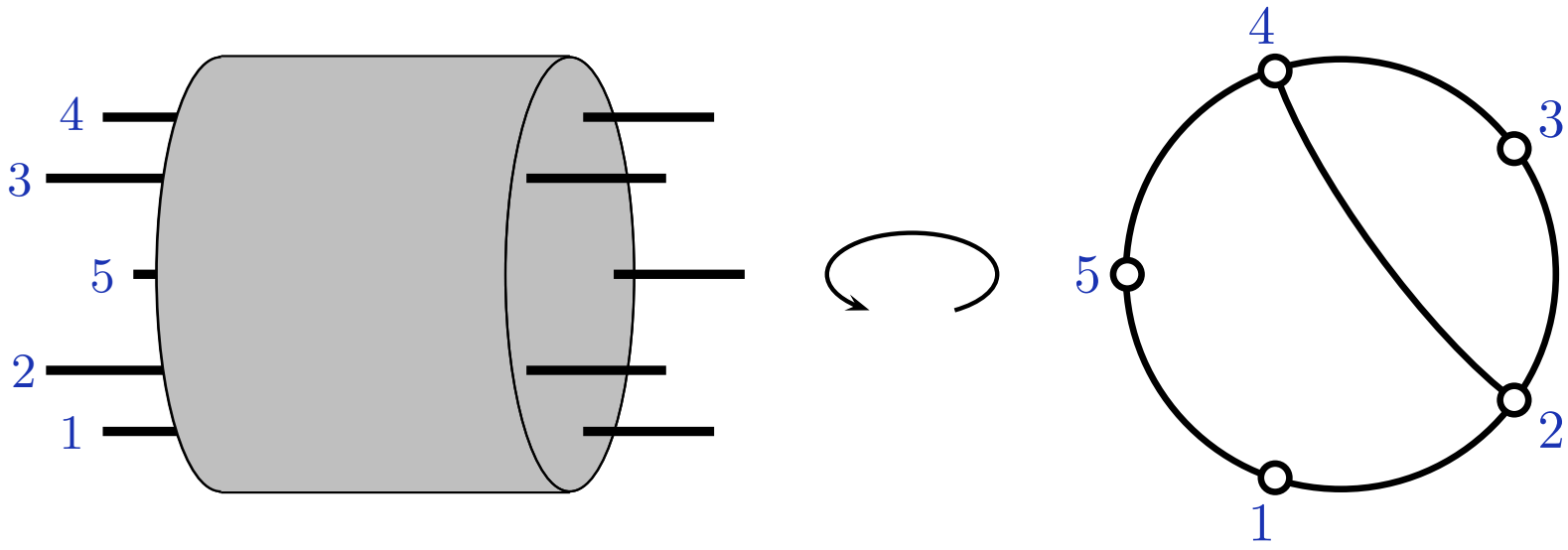
Relations entre les tresses $a_{p,q}$

- Fait : Les tresses $a_{p,q}$ satisfont les relations $\mathcal{R}_n$:
  - $a_{p,q}a_{r,s} = a_{r,s}a_{p,q}$ pour $(p-r)(p-s)(q-r)(q-s) > 0$,
  - $a_{p,q}a_{q,r} = a_{q,r}a_{p,r} = a_{p,r}a_{p,q}$ pour $1 \leqslant p < q < r \leqslant n$.



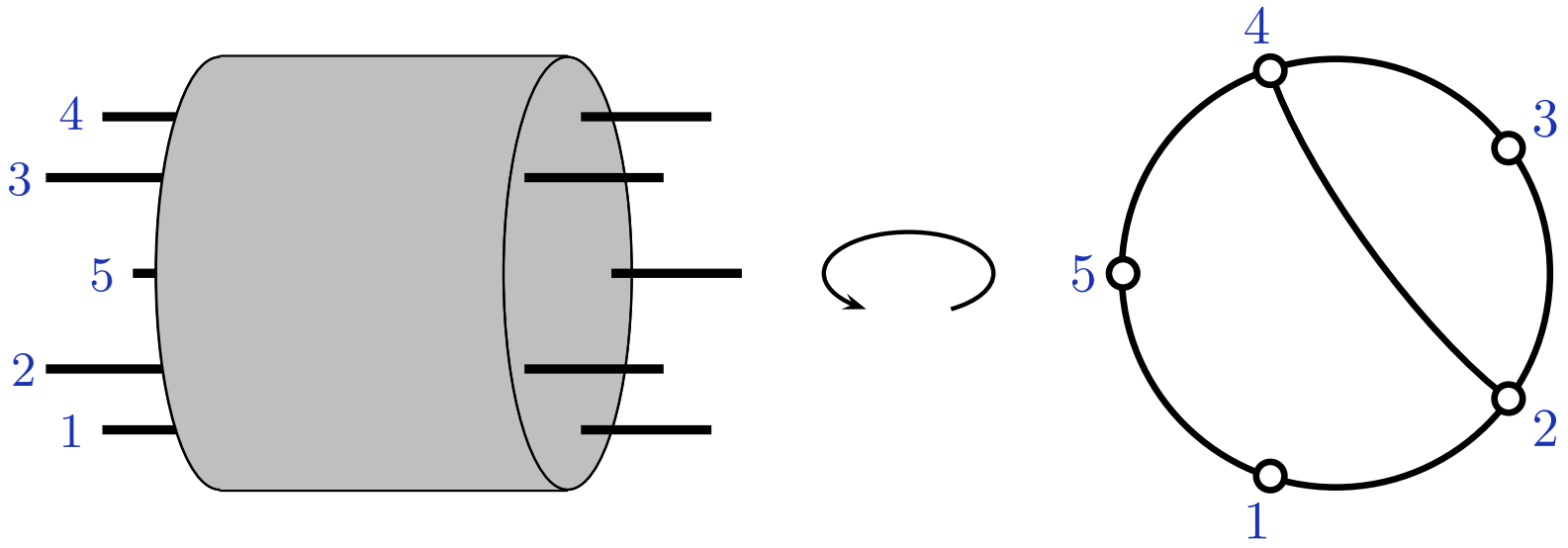
Relations entre les tresses $a_{p,q}$

- Fait : Les tresses $a_{p,q}$ satisfont les relations $\mathcal{R}_n$:
  - $a_{p,q}a_{r,s} = a_{r,s}a_{p,q}$ pour $(p-r)(p-s)(q-r)(q-s) > 0$,
  - $a_{p,q}a_{q,r} = a_{q,r}a_{p,r} = a_{p,r}a_{p,q}$ pour $1 \leqslant p < q < r \leqslant n$.



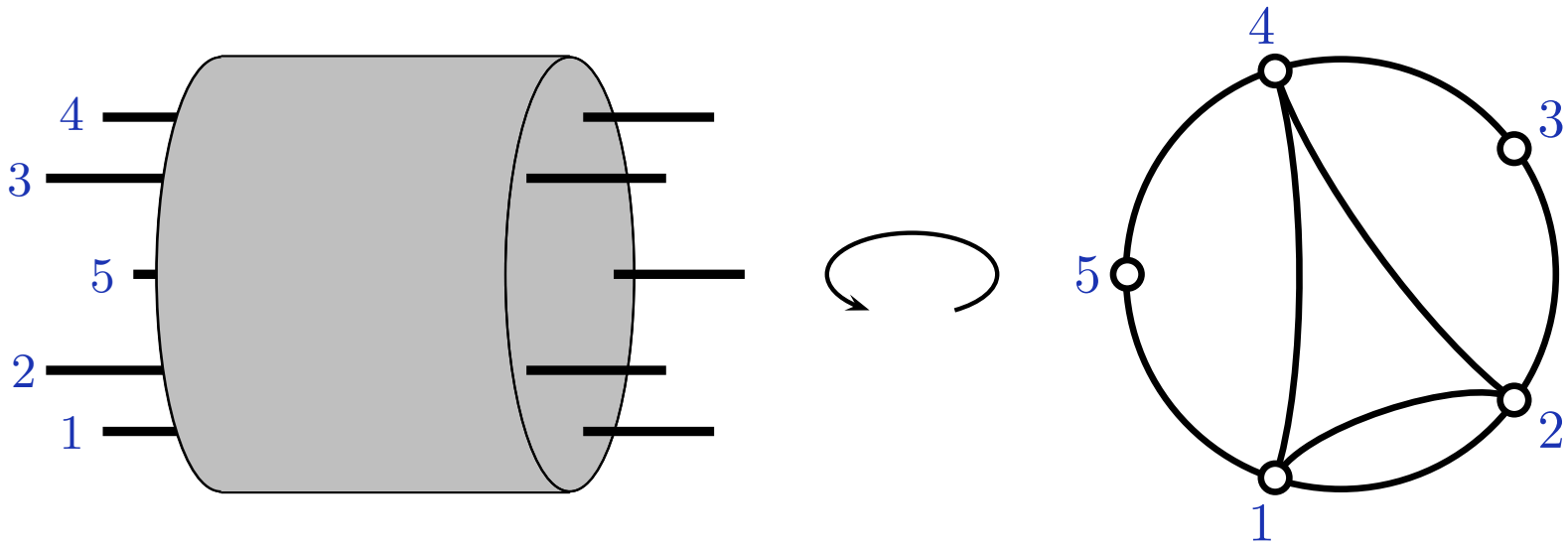
Relations entre les tresses $a_{p,q}$

- Fait : Les tresses $a_{p,q}$ satisfont les relations $\mathcal{R}_n$:
  - $a_{p,q}a_{r,s} = a_{r,s}a_{p,q}$ pour $(p-r)(p-s)(q-r)(q-s) > 0$,
  - $a_{p,q}a_{q,r} = a_{q,r}a_{p,r} = a_{p,r}a_{p,q}$ pour $1 \leqslant p < q < r \leqslant n$.



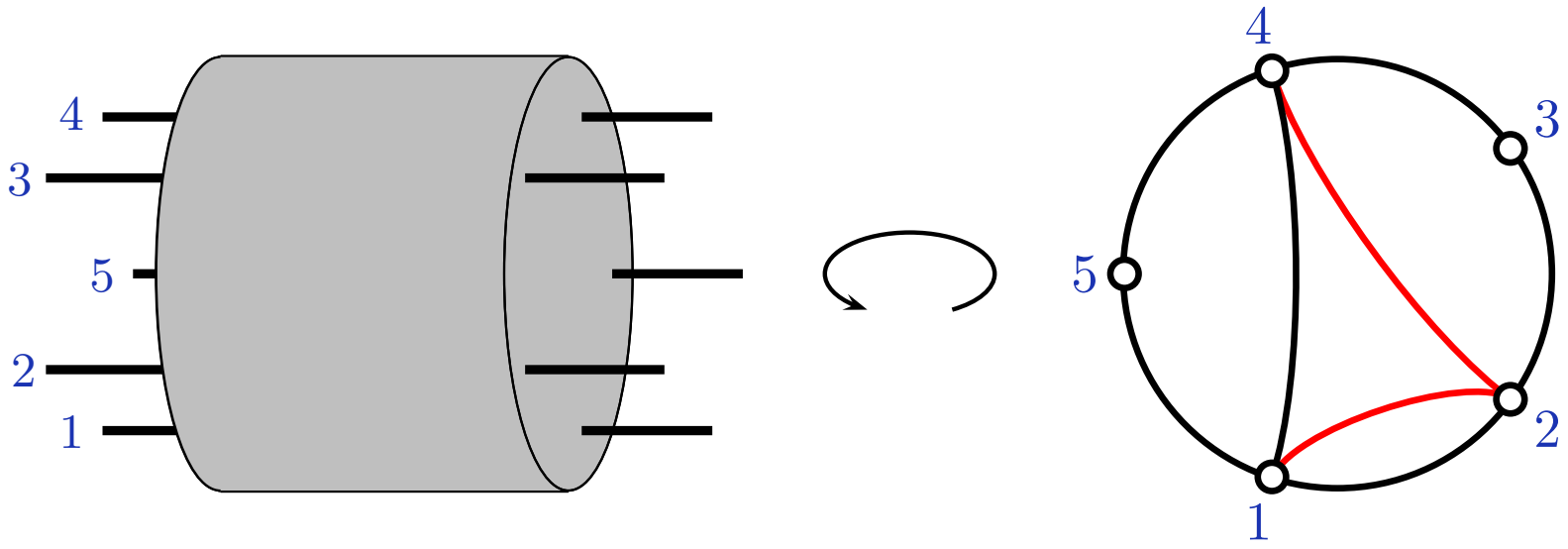
Relations entre les tresses $a_{p,q}$

- Fait : Les tresses $a_{p,q}$ satisfont les relations $\mathcal{R}_n$:
  - $a_{p,q}a_{r,s} = a_{r,s}a_{p,q}$ pour $(p-r)(p-s)(q-r)(q-s) > 0$,
  - $a_{p,q}a_{q,r} = a_{q,r}a_{p,r} = a_{p,r}a_{p,q}$ pour $1 \leqslant p < q < r \leqslant n$.



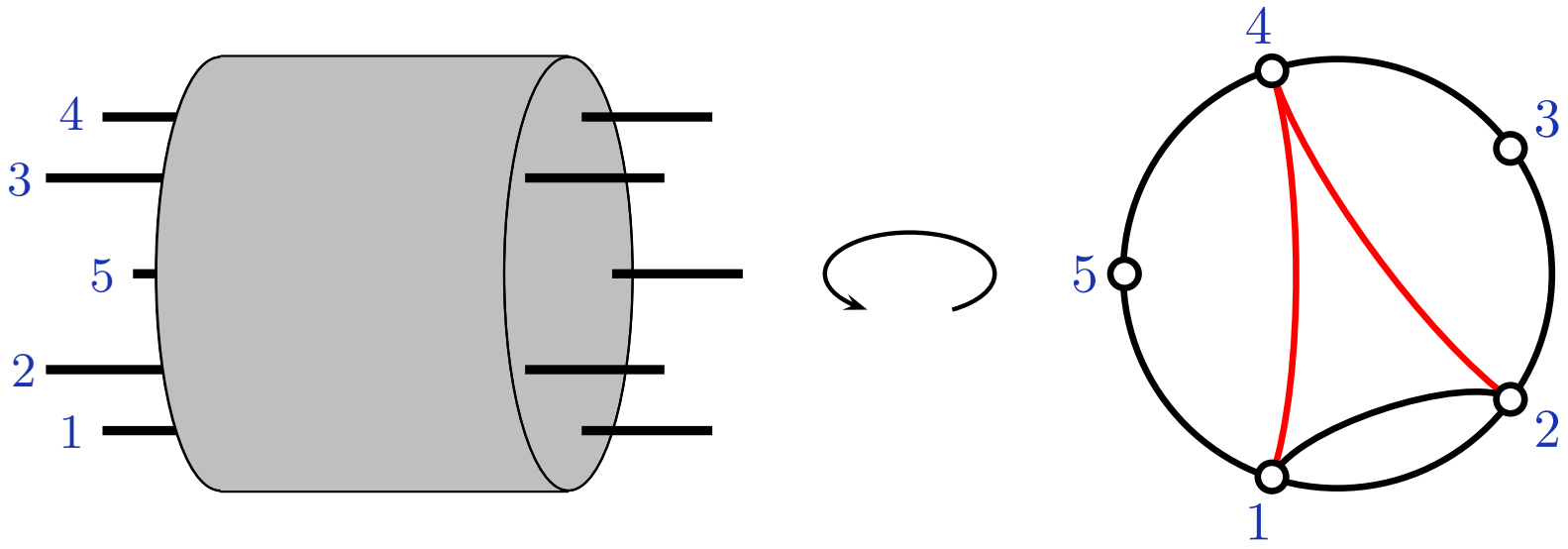
Relations entre les tresses $a_{p,q}$

- Fait : Les tresses $a_{p,q}$ satisfont les relations $\mathcal{R}_n$:
  - $a_{p,q}a_{r,s} = a_{r,s}a_{p,q}$ pour $(p-r)(p-s)(q-r)(q-s) > 0$,
  - $a_{p,q}a_{q,r} = a_{q,r}a_{p,r} = a_{p,r}a_{p,q}$ pour $1 \leqslant p < q < r \leqslant n$.



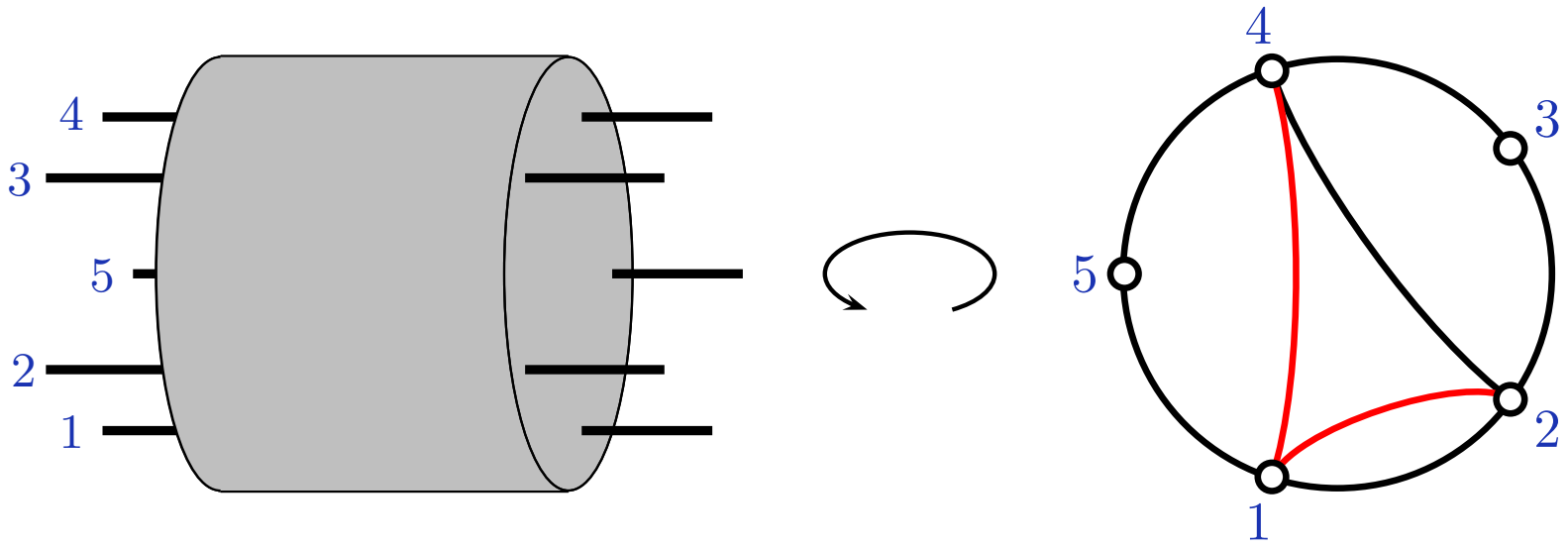
Relations entre les tresses $a_{p,q}$

- Fait : Les tresses $a_{p,q}$ satisfont les relations $\mathcal{R}_n$:
  - $a_{p,q}a_{r,s} = a_{r,s}a_{p,q}$ pour $(p-r)(p-s)(q-r)(q-s) > 0$,
  - $a_{p,q}a_{q,r} = a_{q,r}a_{p,r} = a_{p,r}a_{p,q}$ pour $1 \leqslant p < q < r \leqslant n$.



Relations entre les tresses $a_{p,q}$

- Fait : Les tresses $a_{p,q}$ satisfont les relations $\mathcal{R}_n$:
  - $a_{p,q}a_{r,s} = a_{r,s}a_{p,q}$ pour $(p-r)(p-s)(q-r)(q-s) > 0$,
  - $a_{p,q}a_{q,r} = a_{q,r}a_{p,r} = a_{p,r}a_{p,q}$ pour $1 \leqslant p < q < r \leqslant n$.



Le monoïde de tresses dual B_n^{+*}

- **Proposition :** Relativement aux $a_{p,q}$ (avec $1 \leqslant p < q \leqslant n$), le groupe B_n est présenté par les relations $\mathcal{R}_n$.

Le monoïde de tresses dual B_n^{+*}

- **Proposition :** Relativement aux $a_{p,q}$ (avec $1 \leqslant p < q \leqslant n$), le groupe B_n est présenté par les relations $\mathcal{R}_n$.

facile

Le monoïde de tresses dual B_n^{+*}

- **Proposition :** Relativement aux $a_{p,q}$ (avec $1 \leqslant p < q \leqslant n$), le groupe B_n est présenté par les relations $\mathcal{R}_n$.

facile

- **Définition :** Le monoïde de tresses dual à n brins B_n^{+*} est le sous-monoïde de B_n engendré par les $a_{p,q}$ avec $1 \leqslant p < q \leqslant n$.

Le monoïde de tresses dual B_n^{+*}

- **Proposition :** Relativement aux $a_{p,q}$ (avec $1 \leqslant p < q \leqslant n$), le groupe B_n est présenté par les relations $\mathcal{R}_n$.

facile

- **Définition :** Le monoïde de tresses dual à n brins B_n^{+*} est le sous-monoïde de B_n engendré par les $a_{p,q}$ avec $1 \leqslant p < q \leqslant n$.

- **Théorème (Birman–Ko–Lee '97) :** Relativement aux générateurs $a_{p,q}$, le monoïde de tresses dual B_n^{+*} est présenté par les relations $\mathcal{R}_n$.

Le monoïde de tresses dual B_n^{+*}

- **Proposition :** Relativement aux $a_{p,q}$ (avec $1 \leqslant p < q \leqslant n$), le groupe B_n est présenté par les relations $\mathcal{R}_n$.

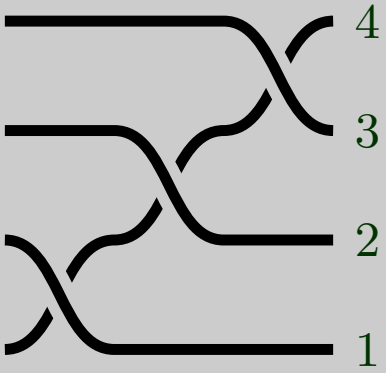
facile

- **Définition :** Le monoïde de tresses dual à n brins B_n^{+*} est le sous-monoïde de B_n engendré par les $a_{p,q}$ avec $1 \leqslant p < q \leqslant n$.

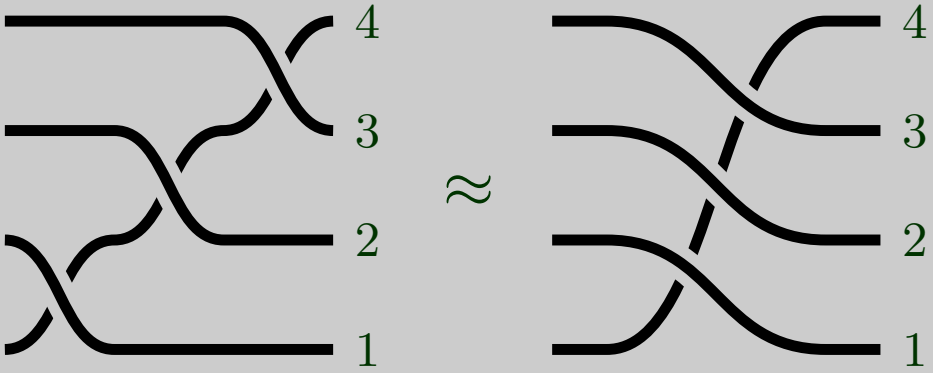
- **Théorème (Birman–Ko–Lee '97) :** Relativement aux générateurs $a_{p,q}$, le monoïde de tresses dual B_n^{+*} est présenté par les relations $\mathcal{R}_n$.

difficile

Structure de Garside de B_n^{+*}

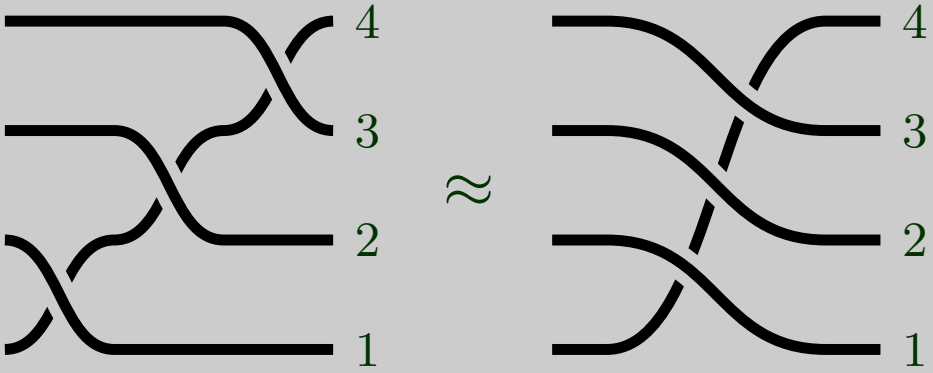
$\delta_n =$ 

Structure de Garside de B_n^{+*}

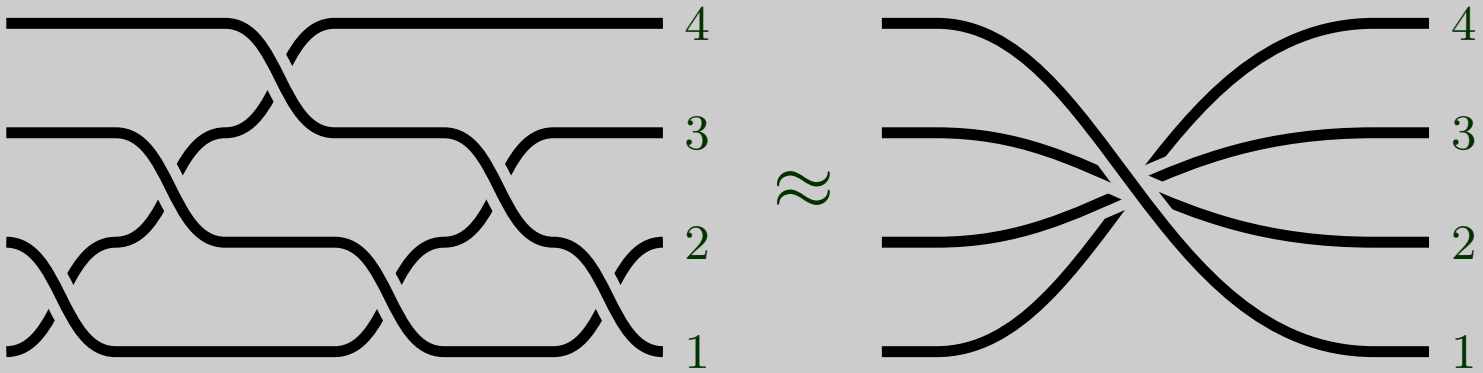
$\delta_n =$ 

Structure de Garside de B_n^{+*}

$\delta_n =$

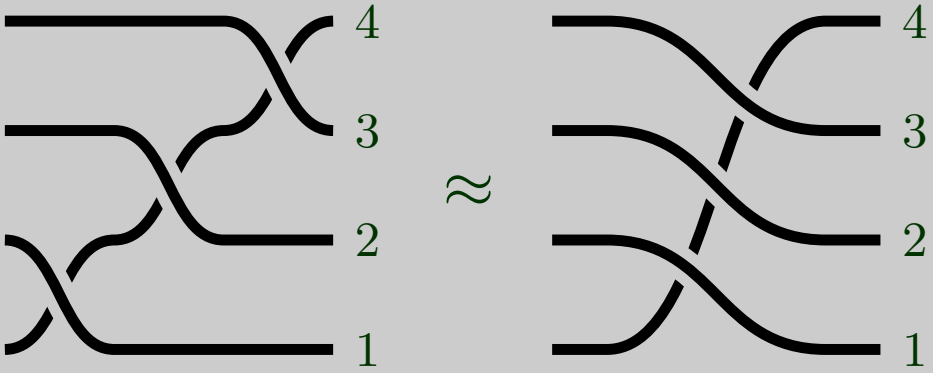


$\Delta_n =$

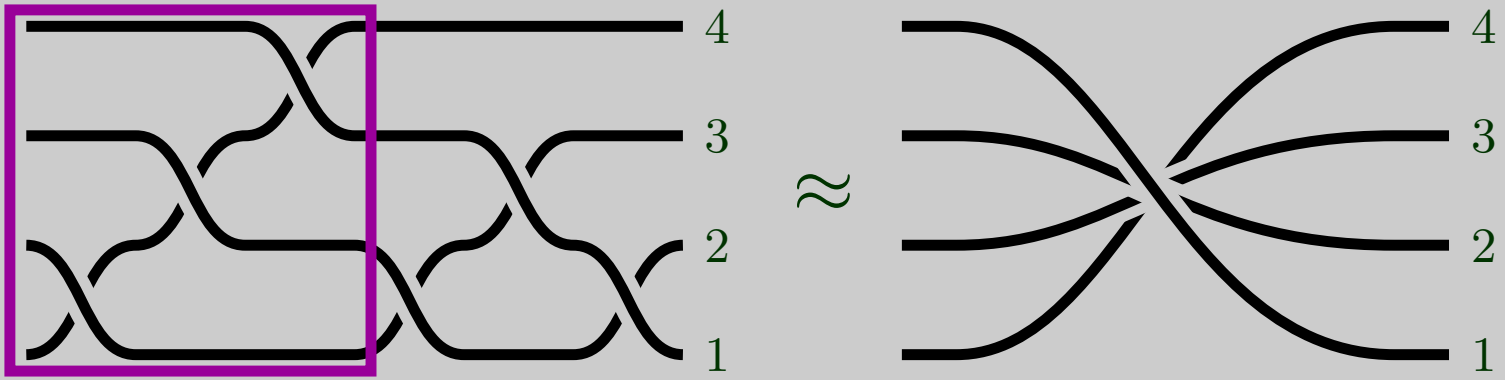


Structure de Garside de B_n^{+*}

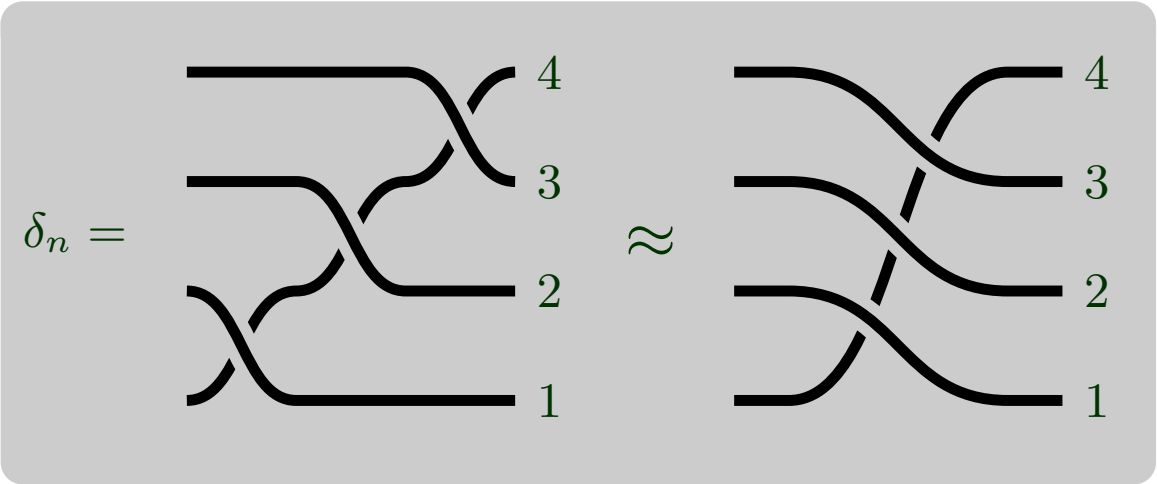
$\delta_n =$

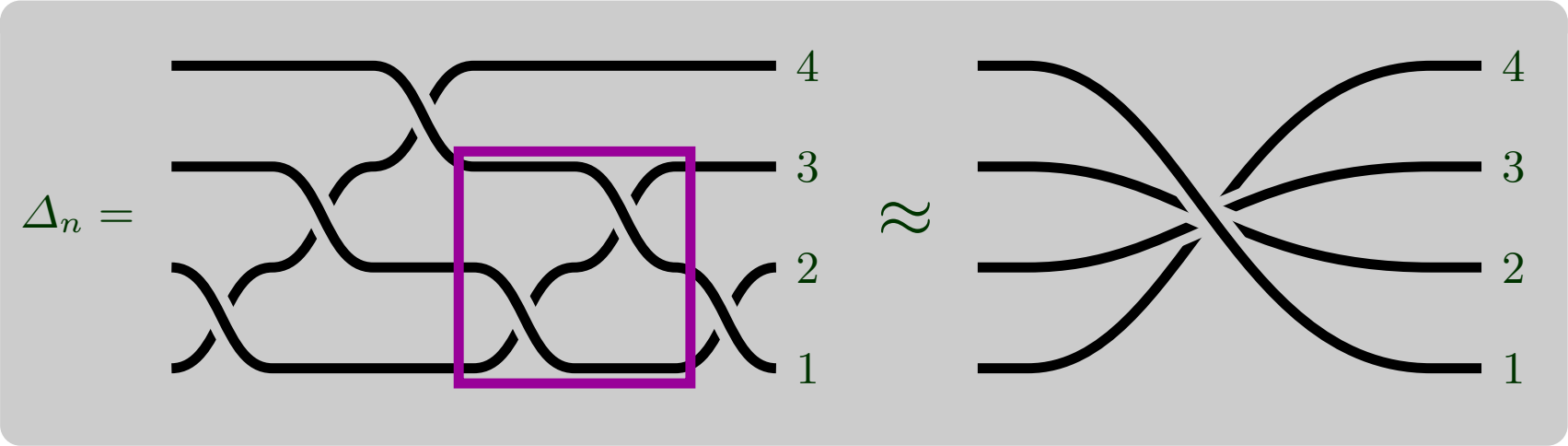


$\Delta_n =$

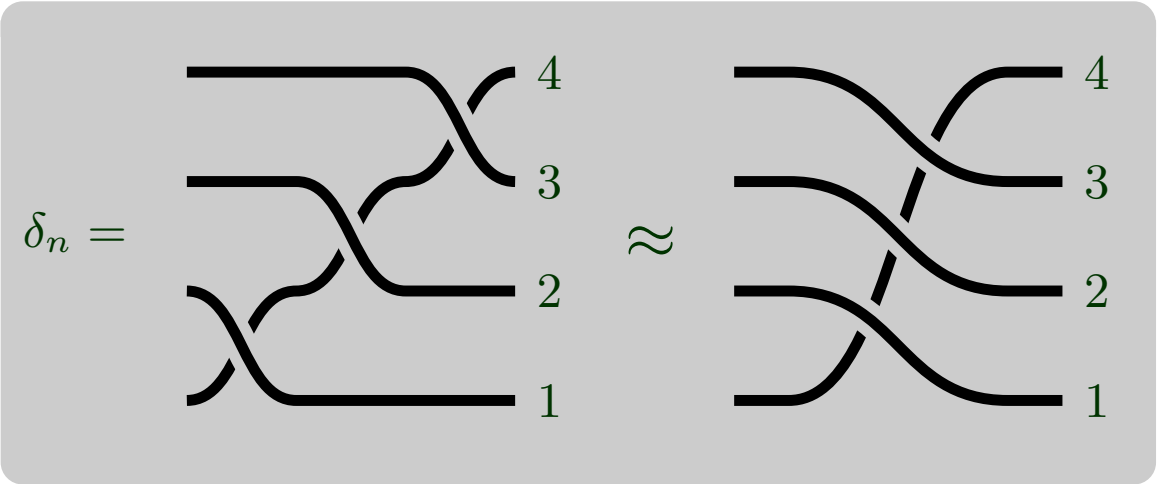


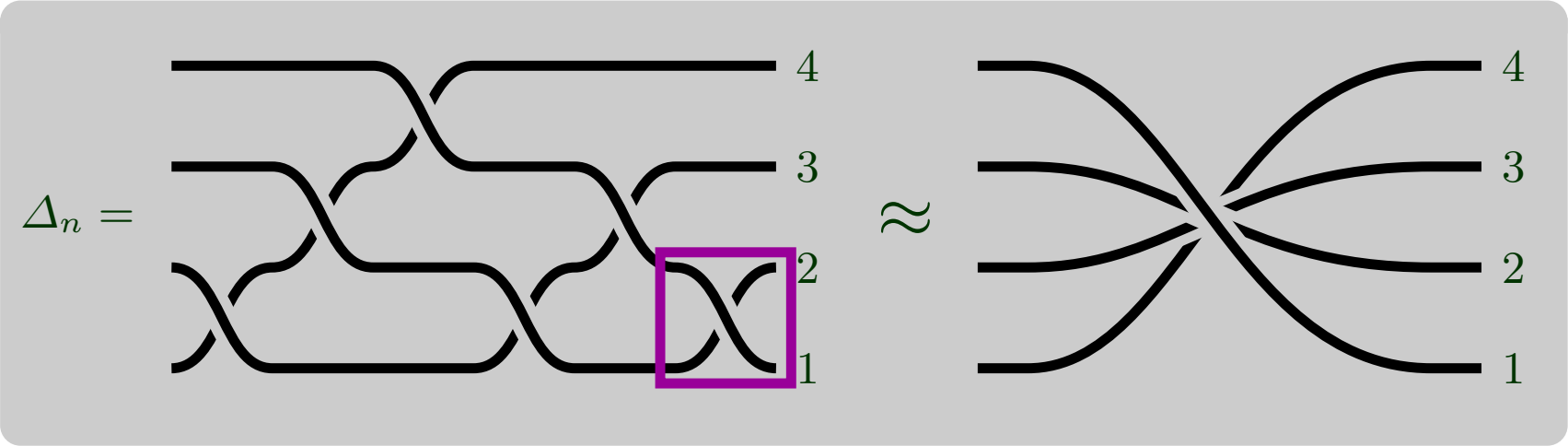
Structure de Garside de B_n^{+*}



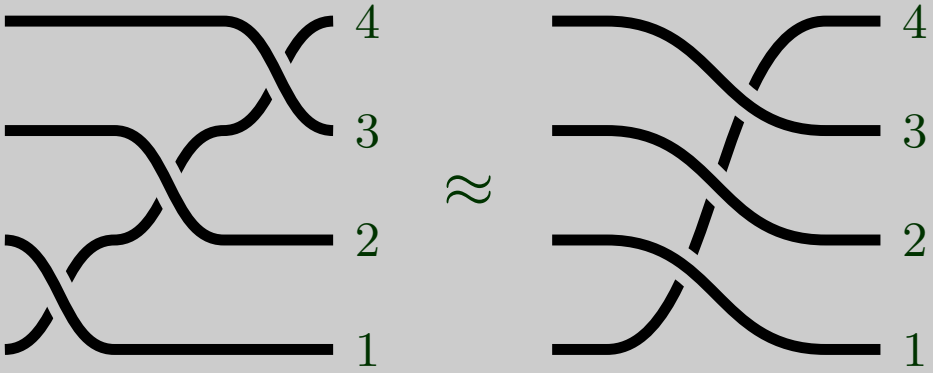


Structure de Garside de B_n^{+*}

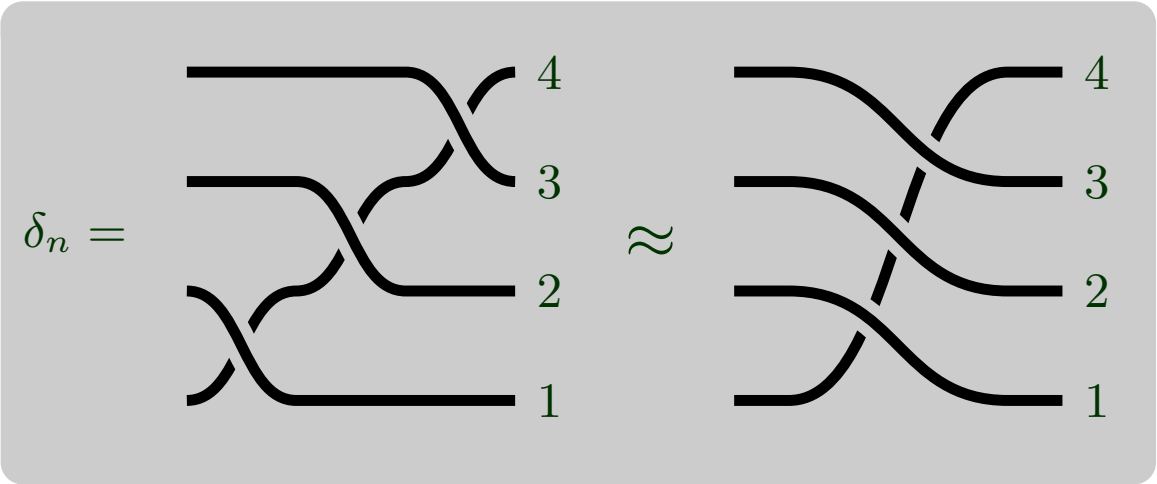




Structure de Garside de B_n^{+*}

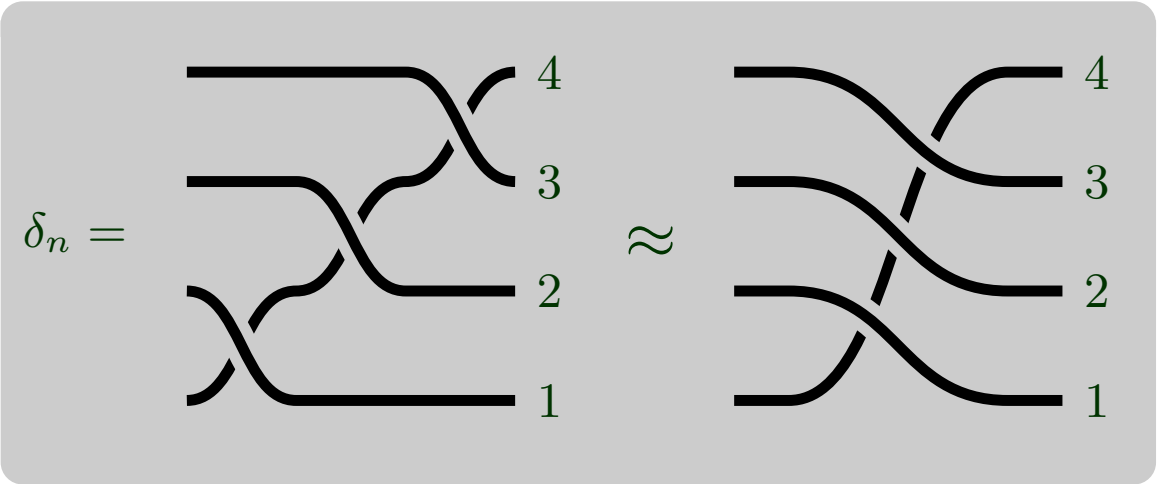
$\delta_n =$ 

Structure de Garside de B_n^{+*}



- Théorème (Birman–Ko–Lee '97): Le monoïde B_n^{+*} admet une structure de Garside relativement à l'élément de Garside δ_n.

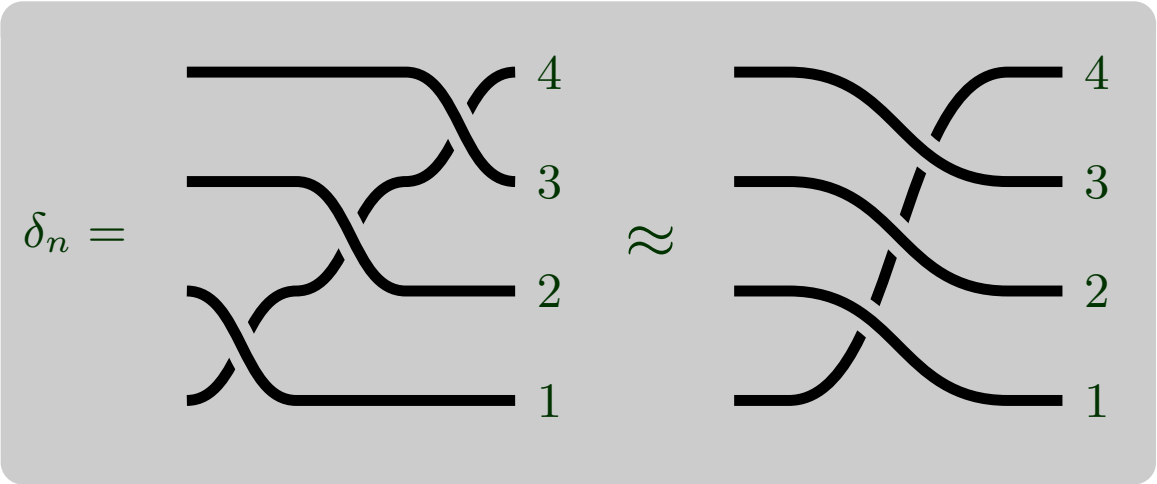
Structure de Garside de B_n^{+*}



- Théorème (Birman–Ko–Lee '97): Le monoïde B_n^{+*} admet une structure de Garside relativement à l'élément de Garside δ_n.

$\rightsquigarrow$ B_n est groupe de fractions de B_n^{+*}

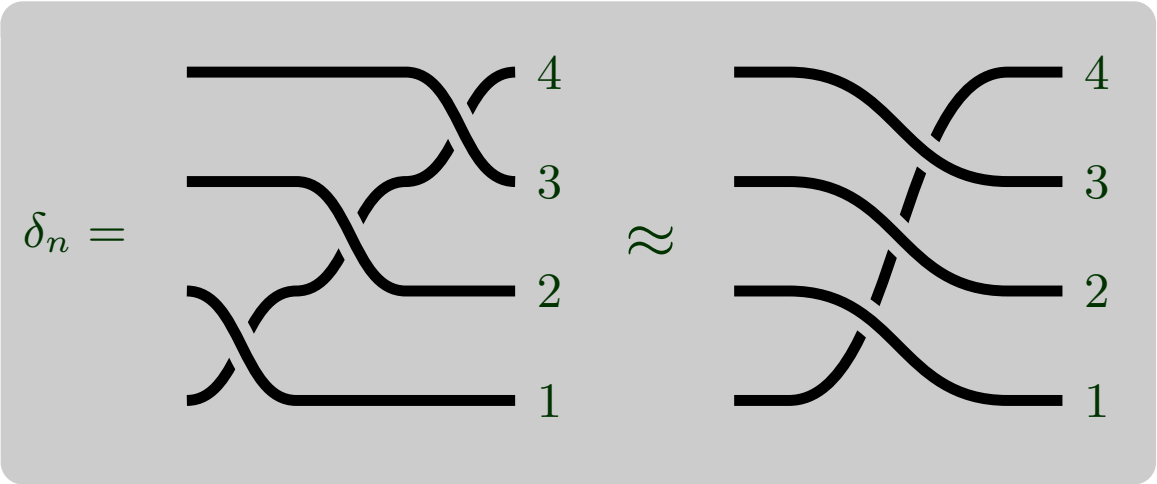
Structure de Garside de B_n^{+*}



- Théorème (Birman–Ko–Lee '97): Le monoïde B_n^{+*} admet une structure de Garside relativement à l'élément de Garside δ_n.

$\rightsquigarrow$ B_n est groupe de fractions de B_n^{+*}
$\rightsquigarrow$ une forme normale de Garside

Structure de Garside de B_n^{+*}



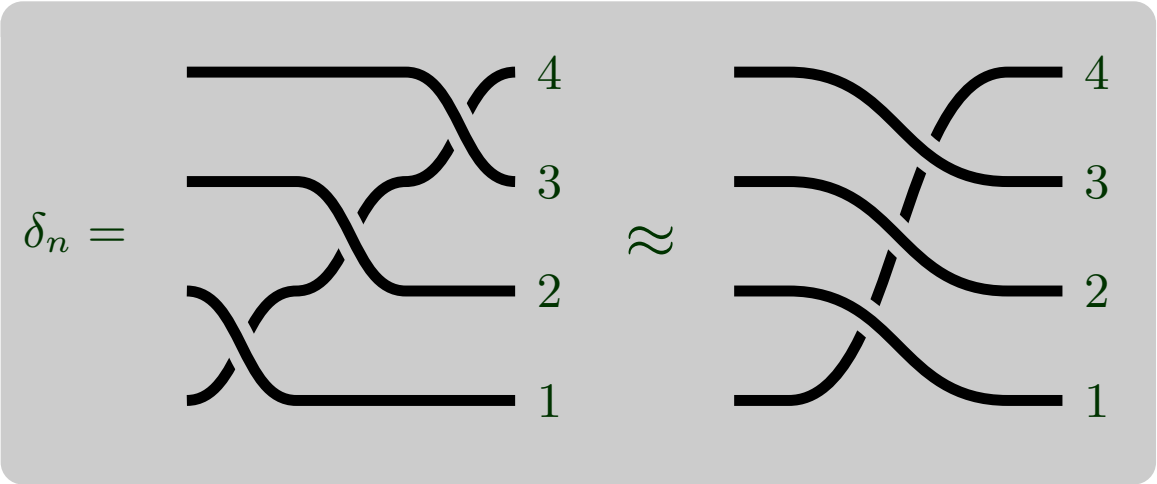
- **Théorème (Birman–Ko–Lee '97)**: Le monoïde B_n^{+*} admet une structure de Garside relativement à l'élément de Garside δ_n.

$\rightsquigarrow$ B_n est groupe de fractions de B_n^{+*}

$\rightsquigarrow$ une forme normale de Garside

$\rightsquigarrow$ une solution quadratique au problème du mot

Structure de Garside de B_n^{+*}



- Théorème (Birman–Ko–Lee '97): Le monoïde B_n^{+*} admet une structure de Garside relativement à l'élément de Garside δ_n.

$\rightsquigarrow$ B_n est groupe de fractions de B_n^{+*}
$\rightsquigarrow$ une forme normale de Garside
$\rightsquigarrow$ une solution quadratique au problème du mot

- Les diviseurs de δ_n sont en bijection avec les partitions non croisées de $\{1, ..., n\}$.

La B_{n-1}^{+*}-fin

- Question : Existe t-il un analogue de la forme normale alternante pour le monoïde de tresses dual B_n^{+*} ?

La B_{n-1}^{+*}-fin

- Question : Existe t-il un analogue de la forme normale alternante pour le monoïde de tresses dual B_n^{+*} ?

- Lemme : Pour $n \geqslant 3$, toute tresse β de B_n^{+*} admet un unique diviseur maximal β_1 appartenant à B_{n-1}^{+*}.

La B_{n-1}^{+*}-fin

- Question : Existe t-il un analogue de la forme normale alternante pour le monoïde de tresses dual B_n^{+*} ?

- Lemme : Pour $n \geqslant 3$, toute tresse β de B_n^{+*} admet un unique diviseur maximal β_1 appartenant à B_{n-1}^{+*}.

β_1 est appelée la B_{n-1}^{+*}-fin de β.

La B_{n-1}^{+*}-fin

- Question : Existe t-il un analogue de la forme normale alternante pour le monoïde de tresses dual B_n^{+*} ?

- Lemme : Pour $n \geqslant 3$, toute tresse β de B_n^{+*} admet un unique diviseur maximal β_1 appartenant à B_{n-1}^{+*}.

β_1 est appelée la B_{n-1}^{+*}-fin de β.

La B_{n-1}^{+*}-fin

- Question : Existe t-il un analogue de la forme normale alternante pour le monoïde de tresses dual B_n^{+*} ?

- Lemme : Pour $n \geqslant 3$, toute tresse β de B_n^{+*} admet un unique diviseur maximal β_1 appartenant à B_{n-1}^{+*}.

β_1 est appelée la B_{n-1}^{+*}-fin de β.

- Exemple : Calcul de la B_2^{+*}-fin de δ_3^2,

La B_{n-1}^{+*}-fin

- Question : Existe t-il un analogue de la forme normale alternante pour le monoïde de tresses dual B_n^{+*} ?

- Lemme : Pour $n \geqslant 3$, toute tresse β de B_n^{+*} admet un unique diviseur maximal β_1 appartenant à B_{n-1}^{+*}.

β_1 est appelée la B_{n-1}^{+*}-fin de β.

- Exemple : Calcul de la B_2^{+*}-fin de δ_3^2, c.-à-d., la puissance maximale de $a_{1,2}$ qui divise δ_3^2.

La B_{n-1}^{+*}-fin

- Question : Existe t-il un analogue de la forme normale alternante pour le monoïde de tresses dual B_n^{+*} ?

- Lemme : Pour $n \geqslant 3$, toute tresse β de B_n^{+*} admet un unique diviseur maximal β_1 appartenant à B_{n-1}^{+*}.

β_1 est appelée la B_{n-1}^{+*}-fin de β.

- Exemple : Calcul de la B_2^{+*}-fin de δ_3^2, c.-à-d., la puissance maximale de $a_{1,2}$ qui divise δ_3^2.

$$\delta_3^2 =$$

La B_{n-1}^{+*}-fin

- Question : Existe t-il un analogue de la forme normale alternante pour le monoïde de tresses dual B_n^{+*} ?

- Lemme : Pour $n \geqslant 3$, toute tresse β de B_n^{+*} admet un unique diviseur maximal β_1 appartenant à B_{n-1}^{+*}.

β_1 est appelée la B_{n-1}^{+*}-fin de β.

- Exemple : Calcul de la B_2^{+*}-fin de δ_3^2, c.-à-d., la puissance maximale de $a_{1,2}$ qui divise δ_3^2.

$$\delta_3^2 = a_{1,2}a_{2,3}$$

La B_{n-1}^{+*}-fin

- Question : Existe t-il un analogue de la forme normale alternante pour le monoïde de tresses dual B_n^{+*} ?

- Lemme : Pour $n \geqslant 3$, toute tresse β de B_n^{+*} admet un unique diviseur maximal β_1 appartenant à B_{n-1}^{+*}.

β_1 est appelée la B_{n-1}^{+*}-fin de β.

- Exemple : Calcul de la B_2^{+*}-fin de δ_3^2, c.-à-d., la puissance maximale de $a_{1,2}$ qui divise δ_3^2.

$$\delta_3^2 = a_{1,2}a_{2,3}a_{1,2}a_{2,3}$$

La B_{n-1}^{+*}-fin

- Question : Existe t-il un analogue de la forme normale alternante pour le monoïde de tresses dual B_n^{+*} ?

- Lemme : Pour $n \geqslant 3$, toute tresse β de B_n^{+*} admet un unique diviseur maximal β_1 appartenant à B_{n-1}^{+*}.

β_1 est appelée la B_{n-1}^{+*}-fin de β.

- Exemple : Calcul de la B_2^{+*}-fin de δ_3^2, c.-à-d., la puissance maximale de $a_{1,2}$ qui divise δ_3^2.

$$\delta_3^2 = a_{1,2}a_{2,3}a_{1,2}a_{2,3}$$

La B_{n-1}^{+*}-fin

- Question : Existe t-il un analogue de la forme normale alternante pour le monoïde de tresses dual B_n^{+*} ?

- Lemme : Pour $n \geqslant 3$, toute tresse β de B_n^{+*} admet un unique diviseur maximal β_1 appartenant à B_{n-1}^{+*}.

β_1 est appelée la B_{n-1}^{+*}-fin de β.

- Exemple : Calcul de la B_2^{+*}-fin de δ_3^2, c.-à-d., la puissance maximale de $a_{1,2}$ qui divise δ_3^2.

$$\delta_3^2 = a_{1,2}a_{2,3}a_{1,2}a_{2,3} = a_{1,2}a_{2,3}a_{1,3}a_{1,2}$$

La B_{n-1}^{+*}-fin

- Question : Existe t-il un analogue de la forme normale alternante pour le monoïde de tresses dual B_n^{+*} ?

- Lemme : Pour $n \geqslant 3$, toute tresse β de B_n^{+*} admet un unique diviseur maximal β_1 appartenant à B_{n-1}^{+*}.

β_1 est appelée la B_{n-1}^{+*}-fin de β.

- Exemple : Calcul de la B_2^{+*}-fin de δ_3^2, c.-à-d., la puissance maximale de $a_{1,2}$ qui divise δ_3^2.

$$\delta_3^2 = a_{1,2}a_{2,3}a_{1,2}a_{2,3} = a_{1,2}a_{2,3}a_{1,3}a_{1,2}$$

La B_{n-1}^{+*}-fin

- Question : Existe t-il un analogue de la forme normale alternante pour le monoïde de tresses dual B_n^{+*} ?

- Lemme : Pour $n \geqslant 3$, toute tresse β de B_n^{+*} admet un unique diviseur maximal β_1 appartenant à B_{n-1}^{+*}.

β_1 est appelée la B_{n-1}^{+*}-fin de β.

- Exemple : Calcul de la B_2^{+*}-fin de δ_3^2, c.-à-d., la puissance maximale de $a_{1,2}$ qui divise δ_3^2.

$$\delta_3^2 = a_{1,2}a_{2,3}a_{1,2}a_{2,3} = a_{1,2}a_{2,3}a_{1,3}a_{1,2}$$

La B_{n-1}^{+*}-fin

- Question : Existe t-il un analogue de la forme normale alternante pour le monoïde de tresses dual B_n^{+*} ?

- Lemme : Pour $n \geqslant 3$, toute tresse β de B_n^{+*} admet un unique diviseur maximal β_1 appartenant à B_{n-1}^{+*}.

β_1 est appelée la B_{n-1}^{+*}-fin de β.

- Exemple : Calcul de la B_2^{+*}-fin de δ_3^2, c.-à-d., la puissance maximale de $a_{1,2}$ qui divise δ_3^2.

$$\delta_3^2 = a_{1,2}a_{2,3}a_{1,2}a_{2,3} = a_{1,2}a_{2,3}a_{1,3}a_{1,2} = a_{1,2}a_{1,3}a_{1,2}a_{1,2}.$$

La B_{n-1}^{+*}-fin

- Question : Existe t-il un analogue de la forme normale alternante pour le monoïde de tresses dual B_n^{+*} ?

- Lemme : Pour $n \geqslant 3$, toute tresse β de B_n^{+*} admet un unique diviseur maximal β_1 appartenant à B_{n-1}^{+*}.

β_1 est appelée la B_{n-1}^{+*}-fin de β.

- Exemple : Calcul de la B_2^{+*}-fin de δ_3^2, c.-à-d., la puissance maximale de $a_{1,2}$ qui divise δ_3^2.

$$\delta_3^2 = a_{1,2}a_{2,3}a_{1,2}a_{2,3} = a_{1,2}a_{2,3}a_{1,3}a_{1,2} = a_{1,2}a_{1,3}a_{1,2}a_{1,2}.$$

$\rightsquigarrow$ la B_2^{+*}-fin de δ_3^2 est

La B_{n-1}^{+*}-fin

- Question : Existe t-il un analogue de la forme normale alternante pour le monoïde de tresses dual B_n^{+*} ?

- Lemme : Pour $n \geqslant 3$, toute tresse β de B_n^{+*} admet un unique diviseur maximal β_1 appartenant à B_{n-1}^{+*}.

β_1 est appelée la B_{n-1}^{+*}-fin de β.

- Exemple : Calcul de la B_2^{+*}-fin de δ_3^2, c.-à-d., la puissance maximale de $a_{1,2}$ qui divise δ_3^2.

$$\delta_3^2 = a_{1,2}a_{2,3}a_{1,2}a_{2,3} = a_{1,2}a_{2,3}a_{1,3}a_{1,2} = a_{1,2}a_{1,3}a_{1,2}a_{1,2}.$$

$\rightsquigarrow$ la B_2^{+*}-fin de δ_3^2 est

La B_{n-1}^{+*}-fin

- Question : Existe t-il un analogue de la forme normale alternante pour le monoïde de tresses dual B_n^{+*} ?

- Lemme : Pour $n \geqslant 3$, toute tresse β de B_n^{+*} admet un unique diviseur maximal β_1 appartenant à B_{n-1}^{+*}.

β_1 est appelée la B_{n-1}^{+*}-fin de β.

- Exemple : Calcul de la B_2^{+*}-fin de δ_3^2, c.-à-d., la puissance maximale de $a_{1,2}$ qui divise δ_3^2.

$$\delta_3^2 = a_{1,2}a_{2,3}a_{1,2}a_{2,3} = a_{1,2}a_{2,3}a_{1,3}a_{1,2} = a_{1,2}a_{1,3}a_{1,2}a_{1,2}.$$

$\rightsquigarrow$ la B_2^{+*}-fin de δ_3^2 est $a_{1,2}^2$.

La B_{n-1}^{+*}-fin

- Question : Existe t-il un analogue de la forme normale alternante pour le monoïde de tresses dual B_n^{+*} ?

- Lemme : Pour $n \geqslant 3$, toute tresse β de B_n^{+*} admet un unique diviseur maximal β_1 appartenant à B_{n-1}^{+*}.

β_1 est appelée la B_{n-1}^{+*}-fin de β.

- Exemple : Calcul de la B_2^{+*}-fin de δ_3^2, c.-à-d., la puissance maximale de $a_{1,2}$ qui divise δ_3^2.

$$\delta_3^2 = a_{1,2}a_{2,3}a_{1,2}a_{2,3} = a_{1,2}a_{2,3}a_{1,3}a_{1,2} = a_{1,2}a_{1,3}a_{1,2}a_{1,2}.$$

$\rightsquigarrow$ la B_2^{+*}-fin de δ_3^2 est $a_{1,2}^2$.

Automorphisme de Garside dual

- Définition : On pose

Automorphisme de Garside dual

- Définition : On pose

$$\begin{aligned} \phi_n : B_n^{+*} &\to B_n^{+*} \\ \beta &\mapsto \delta_n \, \beta \, \delta_n^{-1} \end{aligned}$$

Automorphisme de Garside dual

- **Définition :** On pose

$$\begin{aligned} \phi_n : B_n^{+*} &\to B_n^{+*} \\ \beta &\mapsto \delta_n \, \beta \, \delta_n^{-1} \end{aligned}$$

- **Lemme :** On a

$$\phi_n(a_{i,j}) = \begin{cases} a_{i+1,j+1} \\ \end{cases}$$

Automorphisme de Garside dual

- **Définition :** On pose
$$\begin{aligned}\phi_n : B_n^{+*} &\to B_n^{+*}\\ \beta &\mapsto \delta_n\,\beta\,\delta_n^{-1}\end{aligned}$$

- **Lemme :** On a
$$\phi_n(a_{i,j}) = \begin{cases} a_{i+1,j+1} & \text{pour } j < n \\ & \end{cases}$$

Automorphisme de Garside dual

- **Définition :** On pose

$$\begin{aligned} \phi_n : B_n^{+*} &\to B_n^{+*} \\ \beta &\mapsto \delta_n \, \beta \, \delta_n^{-1} \end{aligned}$$

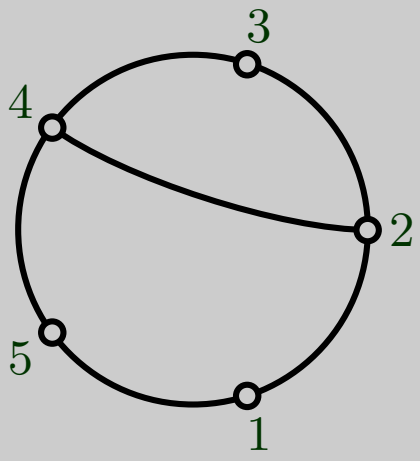
- **Lemme :** On a

$$\phi_n(a_{i,j}) = \begin{cases} a_{i+1,j+1} & \text{pour } j < n \\ a_{1,i+1} & \text{pour } j = n \end{cases}$$

Automorphisme de Garside dual

- **Définition :** On pose
$$\begin{aligned}\phi_n : B_n^{+*} &\to B_n^{+*}\\ \beta &\mapsto \delta_n\,\beta\,\delta_n^{-1}\end{aligned}$$

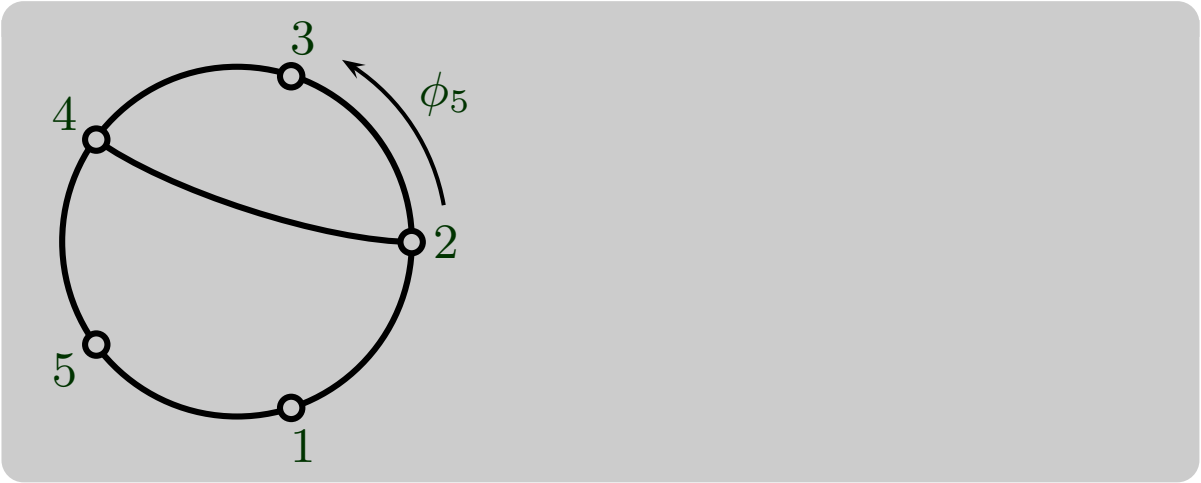
- **Lemme :** On a
$$\phi_n(a_{i,j}) = \begin{cases} a_{i+1,j+1} & \text{pour } j < n \\ a_{1,i+1} & \text{pour } j = n \end{cases}$$



Automorphisme de Garside dual

- **Définition :** On pose
$$\begin{aligned}\phi_n : B_n^{+*} &\to B_n^{+*}\\ \beta &\mapsto \delta_n\,\beta\,\delta_n^{-1}\end{aligned}$$

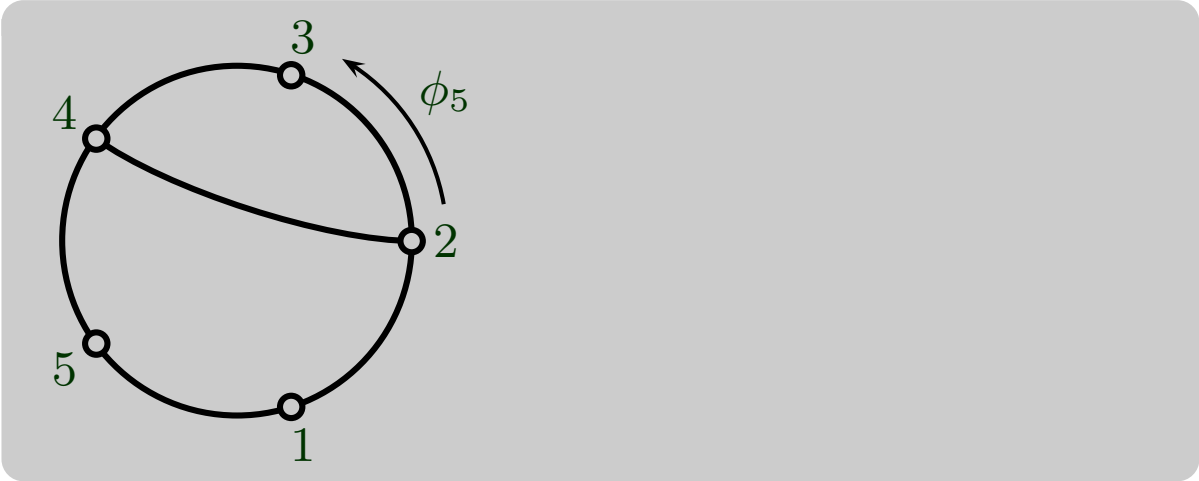
- **Lemme :** On a
$$\phi_n(a_{i,j}) = \begin{cases} a_{i+1,j+1} & \text{pour } j < n \\ a_{1,i+1} & \text{pour } j = n \end{cases}$$



Automorphisme de Garside dual

- **Définition :** On pose
$$\begin{aligned}\phi_n : B_n^{+*} &\to B_n^{+*}\\ \beta &\mapsto \delta_n\,\beta\,\delta_n^{-1}\end{aligned}$$

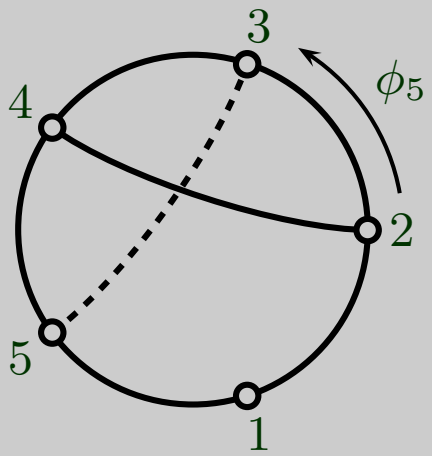
- **Lemme :** On a
$$\phi_n(a_{i,j}) = \begin{cases} a_{i+1,j+1} & \text{pour } j < n \\ a_{1,i+1} & \text{pour } j = n \end{cases}$$



Automorphisme de Garside dual

- **Définition :** On pose
$$\begin{aligned}\phi_n : B_n^{+*} &\to B_n^{+*}\\ \beta &\mapsto \delta_n\,\beta\,\delta_n^{-1}\end{aligned}$$

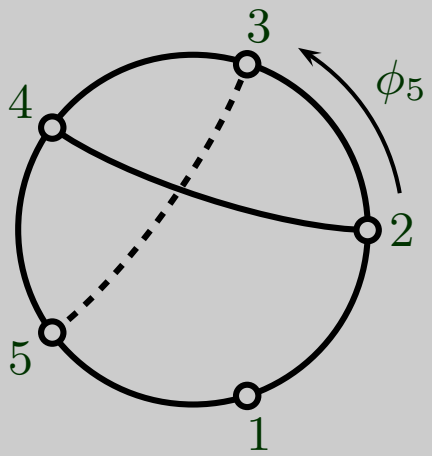
- **Lemme :** On a
$$\phi_n(a_{i,j}) = \begin{cases} a_{i+1,j+1} & \text{pour } j < n \\ a_{1,i+1} & \text{pour } j = n \end{cases}$$



Automorphisme de Garside dual

- **Définition :** On pose
$$\begin{aligned}\phi_n : B_n^{+*} &\to B_n^{+*}\\ \beta &\mapsto \delta_n\,\beta\,\delta_n^{-1}\end{aligned}$$

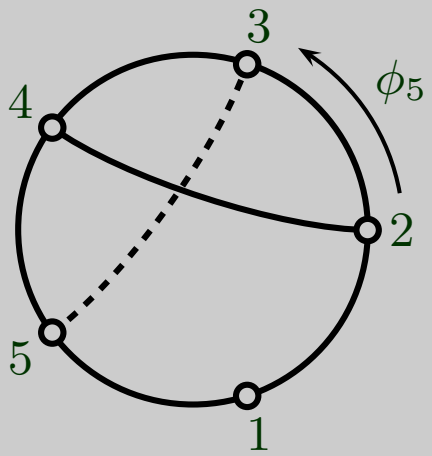
- **Lemme :** On a
$$\phi_n(a_{i,j}) = \begin{cases} a_{i+1,j+1} & \text{pour } j < n \\ a_{1,i+1} & \text{pour } j = n \end{cases}$$



Automorphisme de Garside dual

- **Définition :** On pose
$$\begin{aligned}\phi_n : B_n^{+*} &\to B_n^{+*}\\ \beta &\mapsto \delta_n\,\beta\,\delta_n^{-1}\end{aligned}$$

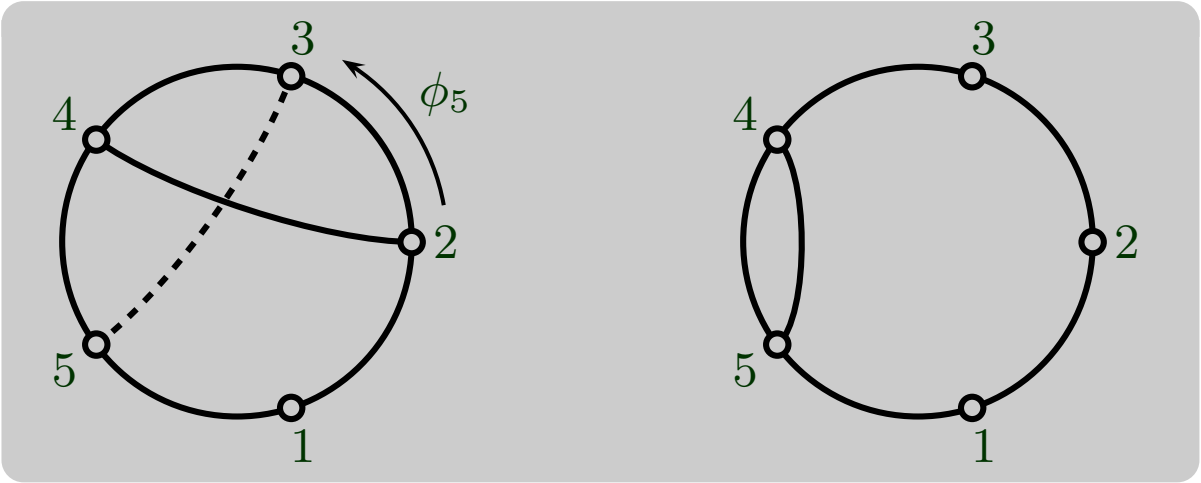
- **Lemme :** On a
$$\phi_n(a_{i,j}) = \begin{cases} a_{i+1,j+1} & \text{pour } j < n \\ a_{1,i+1} & \text{pour } j = n \end{cases}$$



Automorphisme de Garside dual

- **Définition :** On pose
$$\begin{aligned}\phi_n : B_n^{+*} &\to B_n^{+*}\\ \beta &\mapsto \delta_n\,\beta\,\delta_n^{-1}\end{aligned}$$

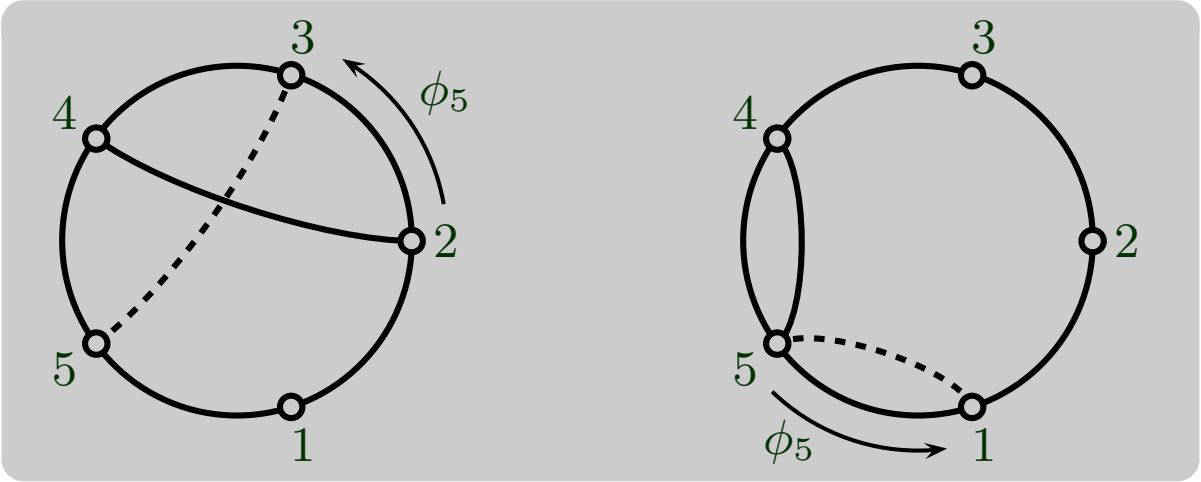
- **Lemme :** On a
$$\phi_n(a_{i,j}) = \begin{cases} a_{i+1,j+1} & \text{pour } j < n \\ a_{1,i+1} & \text{pour } j = n \end{cases}$$



Automorphisme de Garside dual

- **Définition :** On pose
$$\begin{aligned}\phi_n : B_n^{+*} &\to B_n^{+*}\\ \beta &\mapsto \delta_n\,\beta\,\delta_n^{-1}\end{aligned}$$

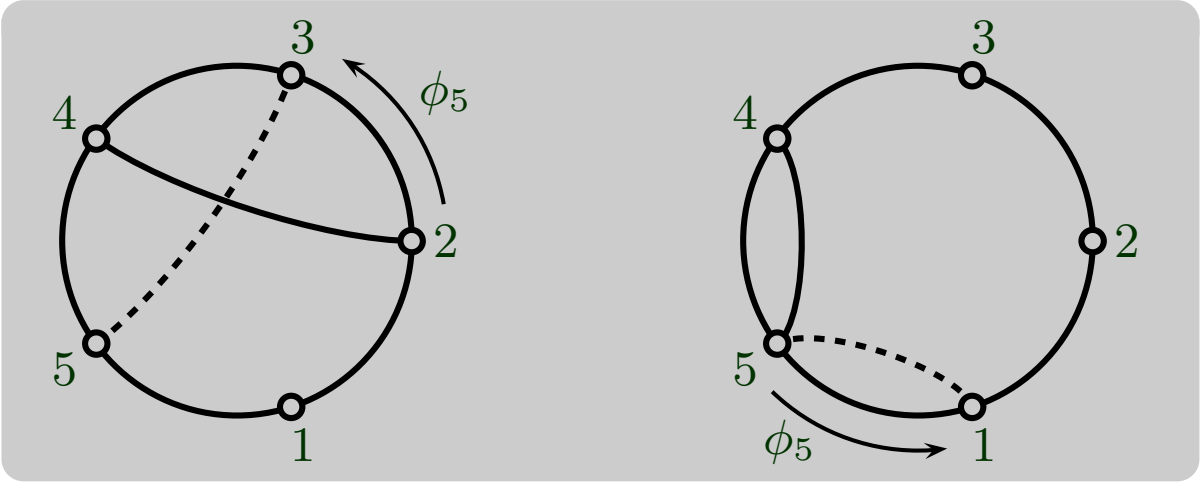
- **Lemme :** On a
$$\phi_n(a_{i,j}) = \begin{cases} a_{i+1,j+1} & \text{pour } j < n \\ a_{1,i+1} & \text{pour } j = n \end{cases}$$



Automorphisme de Garside dual

- **Définition :** On pose
$$\begin{aligned}\phi_n : B_n^{+*} &\to B_n^{+*}\\ \beta &\mapsto \delta_n\,\beta\,\delta_n^{-1}\end{aligned}$$

- **Lemme :** On a
$$\phi_n(a_{i,j}) = \begin{cases} a_{i+1,j+1} & \text{pour } j < n \\ a_{1,i+1} & \text{pour } j = n \end{cases}$$

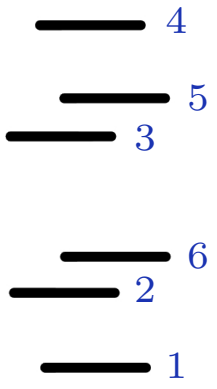


Le ϕ_n-éclatement

- Principe : On itère cycliquement la construction de la fin avec les sous-monoïdes B_{n-1}^{+*}, $\phi_n\left(B_{n-1}^{+*}\right)$, $\phi_n^2\left(B_{n-1}^{+*}\right)$, ... de B_n^{+*}.

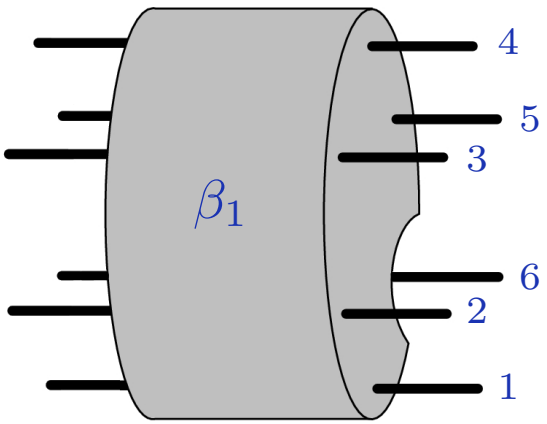
Le ϕ_n-éclatement

- Principe : On itère cycliquement la construction de la fin avec les sous-monoïdes B_{n-1}^{+*}, $\phi_n\left(B_{n-1}^{+*}\right)$, $\phi_n^2\left(B_{n-1}^{+*}\right)$, ... de B_n^{+*}.



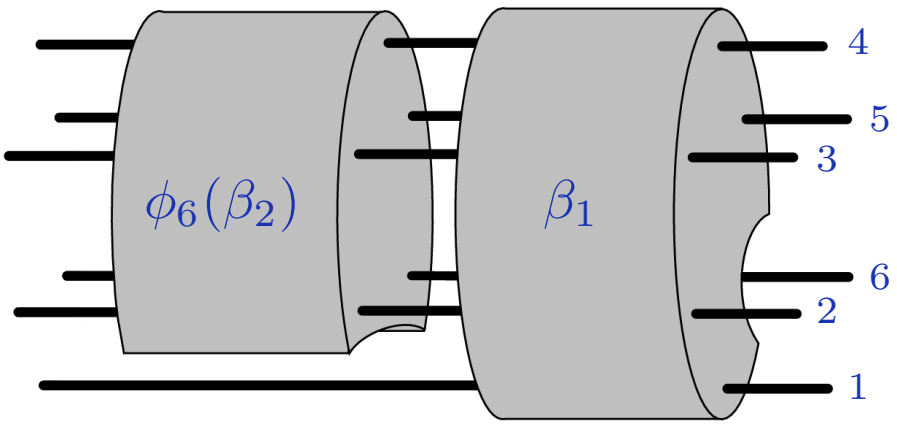
Le ϕ_n-éclatement

- Principe : On itère cycliquement la construction de la fin avec les sous-monoïdes B_{n-1}^{+*}, $\phi_n\left(B_{n-1}^{+*}\right)$, $\phi_n^2\left(B_{n-1}^{+*}\right)$, ... de B_n^{+*}.



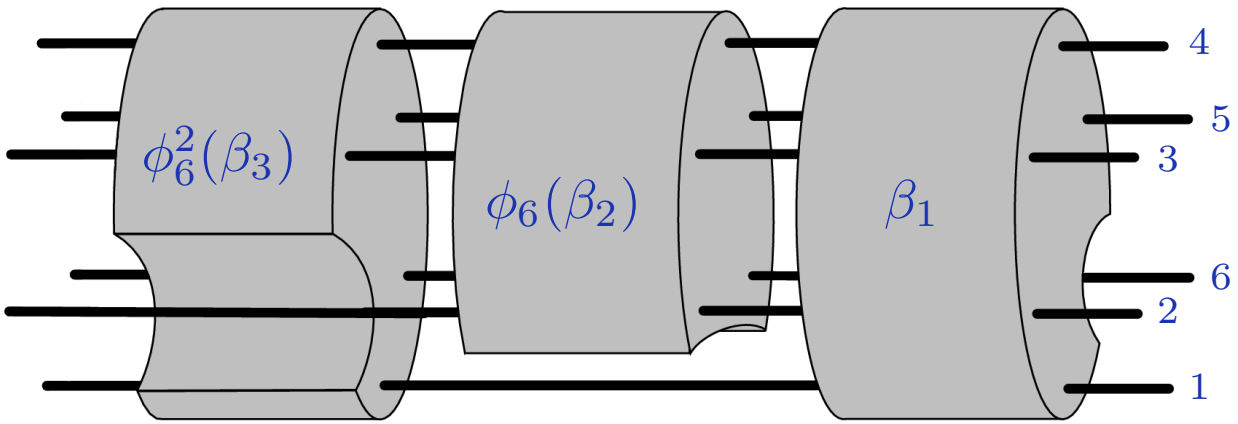
Le ϕ_n-éclatement

- Principe : On itère cycliquement la construction de la fin avec les sous-monoïdes B_{n-1}^{+*}, $\phi_n\left(B_{n-1}^{+*}\right)$, $\phi_n^2\left(B_{n-1}^{+*}\right)$, ... de B_n^{+*}.



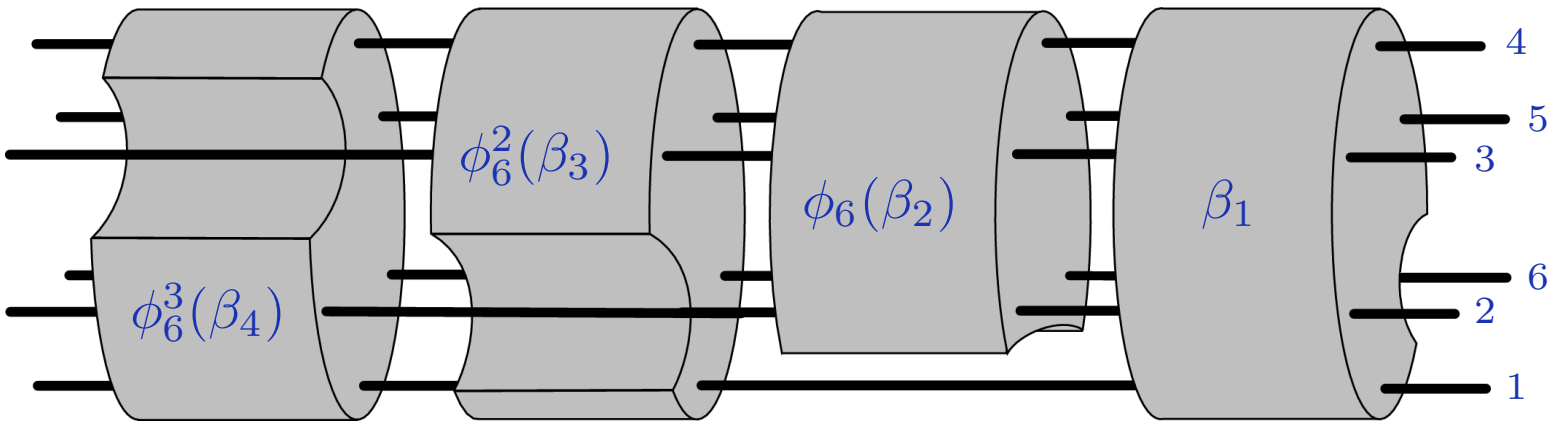
Le ϕ_n-éclatement

- Principe : On itère cycliquement la construction de la fin avec les sous-monoïdes B_{n-1}^{+*}, $\phi_n\left(B_{n-1}^{+*}\right)$, $\phi_n^2\left(B_{n-1}^{+*}\right)$, ... de B_n^{+*}.



Le ϕ_n-éclatement

- Principe : On itère cycliquement la construction de la fin avec les sous-monoïdes B_{n-1}^{+*}, $\phi_n\left(B_{n-1}^{+*}\right)$, $\phi_n^2\left(B_{n-1}^{+*}\right)$, ... de B_n^{+*}.



Le ϕ_n-éclatement

• Proposition : Pour toute tresse β de B_n^{+*}, il existe une unique suite $(\beta_b, \dots, \beta_1)$ de B_{n-1}^{+*} telle que :

Le ϕ_n-éclatement

- **Proposition** : Pour toute tresse β de B_n^{+*}, il existe une unique suite $(\beta_b, \dots, \beta_1)$ de B_{n-1}^{+*} telle que :
  - $\beta = \phi_n^{b-1}(\beta_b) \cdot \dots \cdot \beta_1$ est vérifiée,

Le ϕ_n-éclatement

- **Proposition** : Pour toute tresse β de B_n^{+*}, il existe une unique suite $(\beta_b, \dots, \beta_1)$ de B_{n-1}^{+*} telle que :
  - $\beta = \phi_n^{b-1}(\beta_b) \cdot \dots \cdot \beta_1$ est vérifiée,
  - β_k est la B_{n-1}^{+*}-fin de $\phi_n^{b-k}(\beta_b) \cdot \dots \cdot \beta_k$.

- **Définition** : La suite $(\beta_b, \dots, \beta_1)$ est le ϕ_n-éclatement de β.
  L'entier b est la ϕ_n-largeur de β.

Le ϕ_n-éclatement

- **Proposition** : Pour toute tresse β de B_n^{+*}, il existe une unique suite $(\beta_b, \dots, \beta_1)$ de B_{n-1}^{+*} telle que :
  - $\beta = \phi_n^{b-1}(\beta_b) \cdot \dots \cdot \beta_1$ est vérifiée,
  - β_k est la B_{n-1}^{+*}-fin de $\phi_n^{b-k}(\beta_b) \cdot \dots \cdot \beta_k$.

- **Définition** : La suite $(\beta_b, \dots, \beta_1)$ est le ϕ_n-éclatement de β.
  L'entier b est la ϕ_n-largeur de β.

- **Exemple** :

Le ϕ_n-éclatement

- **Proposition** : Pour toute tresse β de B_n^{+*}, il existe une unique suite $(\beta_b, \dots, \beta_1)$ de B_{n-1}^{+*} telle que :
  - $\beta = \phi_n^{b-1}(\beta_b) \cdot \dots \cdot \beta_1$ est vérifiée,
  - β_k est la B_{n-1}^{+*}-fin de $\phi_n^{b-k}(\beta_b) \cdot \dots \cdot \beta_k$.

- **Définition** : La suite $(\beta_b, \dots, \beta_1)$ est le ϕ_n-éclatement de β.
  L'entier b est la ϕ_n-largeur de β.

- **Exemple** :
  - Pour $1 \leqslant i < j \leqslant n-1$, le ϕ_n-éclatement de $a_{i,j}$ est $(\ a_{i,j}\ )$.

Le ϕ_n-éclatement

- **Proposition** : Pour toute tresse β de B_n^{+*}, il existe une unique suite $(\beta_b, \dots, \beta_1)$ de B_{n-1}^{+*} telle que :
  - $\beta = \phi_n^{b-1}(\beta_b) \cdot \dots \cdot \beta_1$ est vérifiée,
  - β_k est la B_{n-1}^{+*}-fin de $\phi_n^{b-k}(\beta_b) \cdot \dots \cdot \beta_k$.

- **Définition** : La suite $(\beta_b, \dots, \beta_1)$ est le ϕ_n-éclatement de β.
  L'entier b est la ϕ_n-largeur de β.

- **Exemple** :
  - Pour $1 \leqslant i < j \leqslant n-1$, le ϕ_n-éclatement de $a_{i,j}$ est $(\ a_{i,j}\ )$.
  - Pour $2 \leqslant i$, le ϕ_n-éclatement de $a_{i,n}$ est $(\ a_{i-1,n-1},\ 1\ )$.

Le ϕ_n-éclatement

- **Proposition** : Pour toute tresse β de B_n^{+*}, il existe une unique suite $(\beta_b, \dots, \beta_1)$ de B_{n-1}^{+*} telle que :
  - $\beta = \phi_n^{b-1}(\beta_b) \cdot \dots \cdot \beta_1$ est vérifiée,
  - β_k est la B_{n-1}^{+*}-fin de $\phi_n^{b-k}(\beta_b) \cdot \dots \cdot \beta_k$.

- **Définition** : La suite $(\beta_b, \dots, \beta_1)$ est le ϕ_n-éclatement de β.
  L'entier b est la ϕ_n-largeur de β.

- **Exemple** :
  - Pour $1 \leqslant i < j \leqslant n-1$, le ϕ_n-éclatement de $a_{i,j}$ est $(\ a_{i,j}\ )$.
  - Pour $2 \leqslant i$, le ϕ_n-éclatement de $a_{i,n}$ est $(\ a_{i-1,n-1},\ 1\ )$.
  - Le ϕ_n-éclatement de $a_{1,n}$ est $(\ a_{n-2,n-1},\ 1,\ 1\ )$.

Le ϕ_n-éclatement

• **Proposition** : Pour toute tresse β de B_n^{+*}, il existe une unique suite $(\beta_b, \dots, \beta_1)$ de B_{n-1}^{+*} telle que :

– $\beta = \phi_n^{b-1}(\beta_b) \cdot \dots \cdot \beta_1$ est vérifiée,

– β_k est la B_{n-1}^{+*}-fin de $\phi_n^{b-k}(\beta_b) \cdot \dots \cdot \beta_k$.

• **Définition** : La suite $(\beta_b, \dots, \beta_1)$ est le ϕ_n-éclatement de β.
L'entier b est la ϕ_n-largeur de β.

• **Exemple** :

– Pour $1 \leqslant i < j \leqslant n-1$, le ϕ_n-éclatement de $a_{i,j}$ est $(\ a_{i,j}\ )$.

– Pour $2 \leqslant i$, le ϕ_n-éclatement de $a_{i,n}$ est $(\ a_{i-1,n-1},\ 1\ )$.

– Le ϕ_n-éclatement de $a_{1,n}$ est $(\ a_{n-2,n-1},\ 1,\ 1\ )$.

– Le ϕ_3-éclatement de δ_3^2 est $(\ a_{1,2},\ a_{1,2},\ 1,\ a_{1,2}^2\ )$.

La forme normale tournante

- Fait : Toute tresse β de B_2^{+*} est représentée par un unique mot $a_{1,2}^k$.

La forme normale tournante

- Fait : Toute tresse β de B_2^{+*} est représentée par un unique mot $a_{1,2}^k$.

$a_{1,2}^k$ est appelé la forme normale tournante de β

La forme normale tournante

• Fait : Toute tresse β de B_2^{+*} est représentée par un unique mot $a_{1,2}^k$.

$a_{1,2}^k$ est appelé la forme normale tournante de β

• Définition : Par induction, pour $n \geqslant 3$, la forme normale tournante de β dans B_n^{+*} est le mot $\phi_n^{b-1}(w_b)...\phi_n(w_2)w_1$,

La forme normale tournante

• Fait : Toute tresse β de B_2^{+*} est représentée par un unique mot $a_{1,2}^k$.

$a_{1,2}^k$ est appelé la forme normale tournante de β

• Définition : Par induction, pour $n \geqslant 3$, la forme normale tournante de β dans B_n^{+*} est le mot $\phi_n^{b-1}(w_b)...\phi_n(w_2)w_1$, où $(\beta_b, \dots, \beta_1)$ est le ϕ_n-éclatement de β

La forme normale tournante

• Fait : Toute tresse β de B_2^{+*} est représentée par un unique mot $a_{1,2}^k$.

$a_{1,2}^k$ est appelé la forme normale tournante de β

• Définition : Par induction, pour $n \geqslant 3$, la forme normale tournante de β dans B_n^{+*} est le mot $\phi_n^{b-1}(w_b)...\phi_n(w_2)w_1$, où $(\beta_b, \dots, \beta_1)$ est le ϕ_n-éclatement de β et w_k est la forme normale tournante de β_k.

La forme normale tournante

• Fait : Toute tresse β de B_2^{+*} est représentée par un unique mot $a_{1,2}^k$.

$a_{1,2}^k$ est appelé la forme normale tournante de β

• Définition : Par induction, pour $n \geqslant 3$, la forme normale tournante de β dans B_n^{+*} est le mot $\phi_n^{b-1}(w_b)...\phi_n(w_2)w_1$, où $(\beta_b, \dots, \beta_1)$ est le ϕ_n-éclatement de β et w_k est la forme normale tournante de β_k.

$\phi_n(w)$ est le mot obtenu en appliquant ϕ_n à chaque lettre de w

La forme normale tournante

• Fait : Toute tresse β de B_2^{+*} est représentée par un unique mot $a_{1,2}^k$.

$a_{1,2}^k$ est appelé la forme normale tournante de β

• Définition : Par induction, pour $n \geqslant 3$, la forme normale tournante de β dans B_n^{+*} est le mot $\phi_n^{b-1}(w_b)...\phi_n(w_2)w_1$, où $(\beta_b, \dots, \beta_1)$ est le ϕ_n-éclatement de β et w_k est la forme normale tournante de β_k.

$\phi_n(w)$ est le mot obtenu en appliquant ϕ_n à chaque lettre de w

• Exemple : Le ϕ_3-éclatement de δ_3^2 est $(a_{1,2},\ a_{1,2},\ 1,\ a_{1,2}^2)$.

La forme normale tournante

• Fait : Toute tresse β de B_2^{+*} est représentée par un unique mot $a_{1,2}^k$.

$a_{1,2}^k$ est appelé la forme normale tournante de β

• Définition : Par induction, pour $n \geqslant 3$, la forme normale tournante de β dans B_n^{+*} est le mot $\phi_n^{b-1}(w_b)...\phi_n(w_2)w_1$, où $(\beta_b, \dots, \beta_1)$ est le ϕ_n-éclatement de β et w_k est la forme normale tournante de β_k.

$\phi_n(w)$ est le mot obtenu en appliquant ϕ_n à chaque lettre de w

• Exemple : Le ϕ_3-éclatement de δ_3^2 est $(a_{1,2},\ a_{1,2},\ 1,\ a_{1,2}^2)$.

$\rightsquigarrow$ sa f.n.t est

La forme normale tournante

• Fait : Toute tresse β de B_2^{+*} est représentée par un unique mot $a_{1,2}^k$.

$a_{1,2}^k$ est appelé la forme normale tournante de β

• Définition : Par induction, pour $n \geqslant 3$, la forme normale tournante de β dans B_n^{+*} est le mot $\phi_n^{b-1}(w_b)...\phi_n(w_2)w_1$, où $(\beta_b, \dots, \beta_1)$ est le ϕ_n-éclatement de β et w_k est la forme normale tournante de β_k.

$\phi_n(w)$ est le mot obtenu en appliquant ϕ_n à chaque lettre de w

• Exemple : Le ϕ_3-éclatement de δ_3^2 est $(a_{1,2},\ a_{1,2},\ 1,\ a_{1,2}^2)$.

$\rightsquigarrow$ sa f.n.t est $a_{1,2}^2$

La forme normale tournante

• Fait : Toute tresse β de B_2^{+*} est représentée par un unique mot $a_{1,2}^k$.

$a_{1,2}^k$ est appelé la forme normale tournante de β

• Définition : Par induction, pour $n \geqslant 3$, la forme normale tournante de β dans B_n^{+*} est le mot $\phi_n^{b-1}(w_b)...\phi_n(w_2)w_1$, où $(\beta_b, \dots, \beta_1)$ est le ϕ_n-éclatement de β et w_k est la forme normale tournante de β_k.

$\phi_n(w)$ est le mot obtenu en appliquant ϕ_n à chaque lettre de w

• Exemple : Le ϕ_3-éclatement de δ_3^2 est $(a_{1,2},\ a_{1,2},\ 1,\ a_{1,2}^2)$.

$\rightsquigarrow$ sa f.n.t est $\phi_3(\varepsilon)a_{1,2}^2$

La forme normale tournante

• Fait : Toute tresse β de B_2^{+*} est représentée par un unique mot $a_{1,2}^k$.

$a_{1,2}^k$ est appelé la forme normale tournante de β

• Définition : Par induction, pour $n \geqslant 3$, la forme normale tournante de β dans B_n^{+*} est le mot $\phi_n^{b-1}(w_b)...\phi_n(w_2)w_1$, où $(\beta_b, \dots, \beta_1)$ est le ϕ_n-éclatement de β et w_k est la forme normale tournante de β_k.

$\phi_n(w)$ est le mot obtenu en appliquant ϕ_n à chaque lettre de w

• Exemple : Le ϕ_3-éclatement de δ_3^2 est $(a_{1,2},\ a_{1,2},\ 1,\ a_{1,2}^2)$.

$\rightsquigarrow$ sa f.n.t est $\phi_3^2(a_{1,2})\phi_3(\varepsilon)a_{1,2}^2$

La forme normale tournante

• Fait : Toute tresse β de B_2^{+*} est représentée par un unique mot $a_{1,2}^k$.

$a_{1,2}^k$ est appelé la forme normale tournante de β

• Définition : Par induction, pour $n \geqslant 3$, la forme normale tournante de β dans B_n^{+*} est le mot $\phi_n^{b-1}(w_b)...\phi_n(w_2)w_1$, où $(\beta_b, \dots, \beta_1)$ est le ϕ_n-éclatement de β et w_k est la forme normale tournante de β_k.

$\phi_n(w)$ est le mot obtenu en appliquant ϕ_n à chaque lettre de w

• Exemple : Le ϕ_3-éclatement de δ_3^2 est $(a_{1,2},\ a_{1,2},\ 1,\ a_{1,2}^2)$.

$\rightsquigarrow$ sa f.n.t est $\phi_3^3(a_{1,2})\phi_3^2(a_{1,2})\phi_3(\varepsilon)a_{1,2}^2$

La forme normale tournante

• Fait : Toute tresse β de B_2^{+*} est représentée par un unique mot $a_{1,2}^k$.

$a_{1,2}^k$ est appelé la forme normale tournante de β

• Définition : Par induction, pour $n \geqslant 3$, la forme normale tournante de β dans B_n^{+*} est le mot $\phi_n^{b-1}(w_b)...\phi_n(w_2)w_1$, où $(\beta_b, \dots, \beta_1)$ est le ϕ_n-éclatement de β et w_k est la forme normale tournante de β_k.

$\phi_n(w)$ est le mot obtenu en appliquant ϕ_n à chaque lettre de w

• Exemple : Le ϕ_3-éclatement de δ_3^2 est $(a_{1,2},\ a_{1,2},\ 1,\ a_{1,2}^2)$.

$\rightsquigarrow$ sa f.n.t est $\phi_3^3(a_{1,2})\phi_3^2(a_{1,2})\phi_3(\varepsilon)a_{1,2}^2 =$

La forme normale tournante

• Fait : Toute tresse β de B_2^{+*} est représentée par un unique mot $a_{1,2}^k$.

$a_{1,2}^k$ est appelé la forme normale tournante de β

• Définition : Par induction, pour $n \geqslant 3$, la forme normale tournante de β dans B_n^{+*} est le mot $\phi_n^{b-1}(w_b)...\phi_n(w_2)w_1$, où $(\beta_b, \dots, \beta_1)$ est le ϕ_n-éclatement de β et w_k est la forme normale tournante de β_k.

$\phi_n(w)$ est le mot obtenu en appliquant ϕ_n à chaque lettre de w

• Exemple : Le ϕ_3-éclatement de δ_3^2 est $(a_{1,2},\ a_{1,2},\ 1,\ a_{1,2}^2)$.

$\rightsquigarrow$ sa f.n.t est $\phi_3^3(a_{1,2})\phi_3^2(a_{1,2})\phi_3(\varepsilon)a_{1,2}^2 = \qquad a_{1,2}^2$.

La forme normale tournante

• Fait : Toute tresse β de B_2^{+*} est représentée par un unique mot $a_{1,2}^k$.

$a_{1,2}^k$ est appelé la forme normale tournante de β

• Définition : Par induction, pour $n \geqslant 3$, la forme normale tournante de β dans B_n^{+*} est le mot $\phi_n^{b-1}(w_b)...\phi_n(w_2)w_1$, où $(\beta_b, \dots, \beta_1)$ est le ϕ_n-éclatement de β et w_k est la forme normale tournante de β_k.

$\phi_n(w)$ est le mot obtenu en appliquant ϕ_n à chaque lettre de w

• Exemple : Le ϕ_3-éclatement de δ_3^2 est $(a_{1,2},\ a_{1,2},\ 1,\ a_{1,2}^2)$.

$\rightsquigarrow$ sa f.n.t est $\phi_3^3(a_{1,2})\phi_3^2(a_{1,2})\phi_3(\varepsilon)a_{1,2}^2 = \qquad a_{1,2}^2$.

La forme normale tournante

• Fait : Toute tresse β de B_2^{+*} est représentée par un unique mot $a_{1,2}^k$.

$a_{1,2}^k$ est appelé la forme normale tournante de β

• Définition : Par induction, pour $n \geqslant 3$, la forme normale tournante de β dans B_n^{+*} est le mot $\phi_n^{b-1}(w_b)...\phi_n(w_2)w_1$, où $(\beta_b, \dots, \beta_1)$ est le ϕ_n-éclatement de β et w_k est la forme normale tournante de β_k.

$\phi_n(w)$ est le mot obtenu en appliquant ϕ_n à chaque lettre de w

• Exemple : Le ϕ_3-éclatement de δ_3^2 est $(a_{1,2},\ a_{1,2},\ 1,\ a_{1,2}^2)$.

$\rightsquigarrow$ sa f.n.t est $\phi_3^3(a_{1,2})\phi_3^2(a_{1,2})\phi_3(\varepsilon)a_{1,2}^2 = \quad a_{1,3}a_{1,2}^2$.

La forme normale tournante

• Fait : Toute tresse β de B_2^{+*} est représentée par un unique mot $a_{1,2}^k$.

$a_{1,2}^k$ est appelé la forme normale tournante de β

• Définition : Par induction, pour $n \geqslant 3$, la forme normale tournante de β dans B_n^{+*} est le mot $\phi_n^{b-1}(w_b)...\phi_n(w_2)w_1$, où $(\beta_b, \dots, \beta_1)$ est le ϕ_n-éclatement de β et w_k est la forme normale tournante de β_k.

$\phi_n(w)$ est le mot obtenu en appliquant ϕ_n à chaque lettre de w

• Exemple : Le ϕ_3-éclatement de δ_3^2 est $(a_{1,2},\ a_{1,2},\ 1,\ a_{1,2}^2)$.

$\rightsquigarrow$ sa f.n.t est $\phi_3^3(a_{1,2})\phi_3^2(a_{1,2})\phi_3(\varepsilon)a_{1,2}^2 = a_{1,2}a_{1,3}a_{1,2}^2$.

Mot de tresses σ-défini

- Définition :
  - Un mot de tresses w est dit σ_i-positif

Mot de tresses σ-défini

- Définition :
  - Un mot de tresses w est dit σ_i-positif si w contient au moins un σ_i,

Mot de tresses σ-défini

- Définition :
  - Un mot de tresses w est dit σ_i-positif si w contient au moins un σ_i, pas de σ_i^{-1}

Mot de tresses σ-défini

- Définition :
  - Un mot de tresses w est dit σ_i-positif si w contient au moins un σ_i, pas de σ_i^{-1} et pas de $\sigma_j^{\pm 1}$ pour $j > i$.

Mot de tresses σ-défini

- Définition :
  - Un mot de tresses w est dit σ_i-positif si w contient au moins un σ_i, pas de σ_i^{-1} et pas de $\sigma_j^{\pm 1}$ pour $j > i$.
  - Un mot de tresses w est dit σ_i-négatif

Mot de tresses σ-défini

- Définition :
  - Un mot de tresses w est dit σ_i-positif si w contient au moins un σ_i, pas de σ_i^{-1} et pas de $\sigma_j^{\pm 1}$ pour $j > i$.
  - Un mot de tresses w est dit σ_i-négatif si w contient au moins un σ_i^{-1},

Mot de tresses σ-défini

- Définition :
  - Un mot de tresses w est dit σ_i-positif si w contient au moins un σ_i, pas de σ_i^{-1} et pas de $\sigma_j^{\pm 1}$ pour $j > i$.
  - Un mot de tresses w est dit σ_i-négatif si w contient au moins un σ_i^{-1}, pas de σ_i

Mot de tresses σ-défini

- Définition :
  - Un mot de tresses w est dit σ_i-positif si w contient au moins un σ_i, pas de σ_i^{-1} et pas de $\sigma_j^{\pm 1}$ pour $j > i$.
  - Un mot de tresses w est dit σ_i-négatif si w contient au moins un σ_i^{-1}, pas de σ_i et pas de $\sigma_j^{\pm 1}$ pour $j > i$.

Mot de tresses σ-défini

- Définition :
  - Un mot de tresses w est dit σ_i-positif si w contient au moins un σ_i, pas de σ_i^{-1} et pas de $\sigma_j^{\pm 1}$ pour $j > i$.
  - Un mot de tresses w est dit σ_i-négatif si w contient au moins un σ_i^{-1}, pas de σ_i et pas de $\sigma_j^{\pm 1}$ pour $j > i$.

- Exemple :

Le mot $\sigma_2\, \sigma_1\, \sigma_2^{-1}$

Mot de tresses σ-défini

- Définition :
  - Un mot de tresses w est dit σ_i-positif si w contient au moins un σ_i, pas de σ_i^{-1} et pas de $\sigma_j^{\pm 1}$ pour $j > i$.
  - Un mot de tresses w est dit σ_i-négatif si w contient au moins un σ_i^{-1}, pas de σ_i et pas de $\sigma_j^{\pm 1}$ pour $j > i$.

- Exemple :

Le mot $\sigma_2\,\sigma_1\,\sigma_2^{-1}$ n'est ni σ_2-positif,

Mot de tresses σ-défini

- Définition :
  - Un mot de tresses w est dit σ_i-positif si w contient au moins un σ_i, pas de σ_i^{-1} et pas de $\sigma_j^{\pm 1}$ pour $j > i$.
  - Un mot de tresses w est dit σ_i-négatif si w contient au moins un σ_i^{-1}, pas de σ_i et pas de $\sigma_j^{\pm 1}$ pour $j > i$.

- Exemple :

Le mot $\sigma_2\,\sigma_1\,\sigma_2^{-1}$ n'est ni σ_2-positif, ni σ_2-négatif

Mot de tresses σ-défini

- Définition :
  - Un mot de tresses w est dit σ_i-positif si w contient au moins un σ_i, pas de σ_i^{-1} et pas de $\sigma_j^{\pm 1}$ pour $j > i$.
  - Un mot de tresses w est dit σ_i-négatif si w contient au moins un σ_i^{-1}, pas de σ_i et pas de $\sigma_j^{\pm 1}$ pour $j > i$.

- Exemple :

Le mot $\sigma_2\,\sigma_1\,\sigma_2^{-1}$ n'est ni σ_2-positif, ni σ_2-négatif ni σ_1-positif ou σ_1-négatif.

Mot de tresses σ-défini

- Définition :
  - Un mot de tresses w est dit σ_i-positif si w contient au moins un σ_i, pas de σ_i^{-1} et pas de $\sigma_j^{\pm 1}$ pour $j > i$.
  - Un mot de tresses w est dit σ_i-négatif si w contient au moins un σ_i^{-1}, pas de σ_i et pas de $\sigma_j^{\pm 1}$ pour $j > i$.

- Exemple :

Le mot $\sigma_2\,\sigma_1\,\sigma_2^{-1}$ n'est ni σ_2-positif, ni σ_2-négatif ni σ_1-positif ou σ_1-négatif. Par contre le mot équivalent $\sigma_1^{-1}\,\sigma_2\,\sigma_1$ est σ_2-positif.

Mot de tresses σ-défini

- Définition :
  - Un mot de tresses w est dit σ_i-positif si w contient au moins un σ_i, pas de σ_i^{-1} et pas de $\sigma_j^{\pm 1}$ pour $j > i$.
  - Un mot de tresses w est dit σ_i-négatif si w contient au moins un σ_i^{-1}, pas de σ_i et pas de $\sigma_j^{\pm 1}$ pour $j > i$.

- Exemple :

Le mot $\sigma_2\,\sigma_1\,\sigma_2^{-1}$ n'est ni σ_2-positif, ni σ_2-négatif ni σ_1-positif ou σ_1-négatif. Par contre le mot équivalent $\sigma_1^{-1}\,\sigma_2\,\sigma_1$ est σ_2-positif.

- Définition : Un mot de tresses est dit σ-défini

Mot de tresses σ-défini

- Définition :
  - Un mot de tresses w est dit σ_i-positif si w contient au moins un σ_i, pas de σ_i^{-1} et pas de $\sigma_j^{\pm 1}$ pour $j > i$.
  - Un mot de tresses w est dit σ_i-négatif si w contient au moins un σ_i^{-1}, pas de σ_i et pas de $\sigma_j^{\pm 1}$ pour $j > i$.

- Exemple :

Le mot $\sigma_2\,\sigma_1\,\sigma_2^{-1}$ n'est ni σ_2-positif, ni σ_2-négatif ni σ_1-positif ou σ_1-négatif. Par contre le mot équivalent $\sigma_1^{-1}\,\sigma_2\,\sigma_1$ est σ_2-positif.

- Définition : Un mot de tresses est dit σ-défini s'il est soit trivial

Mot de tresses σ-défini

- Définition :
  - Un mot de tresses w est dit σ_i-positif si w contient au moins un σ_i, pas de σ_i^{-1} et pas de $\sigma_j^{\pm 1}$ pour $j > i$.
  - Un mot de tresses w est dit σ_i-négatif si w contient au moins un σ_i^{-1}, pas de σ_i et pas de $\sigma_j^{\pm 1}$ pour $j > i$.

- Exemple :

Le mot $\sigma_2\,\sigma_1\,\sigma_2^{-1}$ n'est ni σ_2-positif, ni σ_2-négatif ni σ_1-positif ou σ_1-négatif.
Par contre le mot équivalent $\sigma_1^{-1}\,\sigma_2\,\sigma_1$ est σ_2-positif.

- Définition : Un mot de tresses est dit σ-défini s'il est soit trivial,
  soit σ_i-positif

Mot de tresses σ-défini

- Définition :
  - Un mot de tresses w est dit σ_i-positif si w contient au moins un σ_i, pas de σ_i^{-1} et pas de $\sigma_j^{\pm 1}$ pour $j > i$.
  - Un mot de tresses w est dit σ_i-négatif si w contient au moins un σ_i^{-1}, pas de σ_i et pas de $\sigma_j^{\pm 1}$ pour $j > i$.

- Exemple :

Le mot $\sigma_2\,\sigma_1\,\sigma_2^{-1}$ n'est ni σ_2-positif, ni σ_2-négatif ni σ_1-positif ou σ_1-négatif. Par contre le mot équivalent $\sigma_1^{-1}\,\sigma_2\,\sigma_1$ est σ_2-positif.

- Définition : Un mot de tresses est dit σ-défini s'il est soit trivial, soit σ_i-positif, soit σ_i-négatif.

Mot de tresses σ-défini

- Définition :
  - Un mot de tresses w est dit σ_i-positif si w contient au moins un σ_i, pas de σ_i^{-1} et pas de $\sigma_j^{\pm 1}$ pour $j > i$.
  - Un mot de tresses w est dit σ_i-négatif si w contient au moins un σ_i^{-1}, pas de σ_i et pas de $\sigma_j^{\pm 1}$ pour $j > i$.

- Exemple :

Le mot $\sigma_2\,\sigma_1\,\sigma_2^{-1}$ n'est ni σ_2-positif, ni σ_2-négatif ni σ_1-positif ou σ_1-négatif. Par contre le mot équivalent $\sigma_1^{-1}\,\sigma_2\,\sigma_1$ est σ_2-positif.

- Définition : Un mot de tresses est dit σ-défini s'il est soit trivial, soit σ_i-positif, soit σ_i-négatif.

- Intérêt des mots σ-définis :
  - solution au problème du mot,

Mot de tresses σ-défini

- Définition :
  - Un mot de tresses w est dit σ_i-positif si w contient au moins un σ_i, pas de σ_i^{-1} et pas de $\sigma_j^{\pm 1}$ pour $j > i$.
  - Un mot de tresses w est dit σ_i-négatif si w contient au moins un σ_i^{-1}, pas de σ_i et pas de $\sigma_j^{\pm 1}$ pour $j > i$.

- Exemple :

Le mot $\sigma_2\,\sigma_1\,\sigma_2^{-1}$ n'est ni σ_2-positif, ni σ_2-négatif ni σ_1-positif ou σ_1-négatif. Par contre le mot équivalent $\sigma_1^{-1}\,\sigma_2\,\sigma_1$ est σ_2-positif.

- Définition : Un mot de tresses est dit σ-défini s'il est soit trivial, soit σ_i-positif, soit σ_i-négatif.

- Intérêt des mots σ-définis :
  - solution au problème du mot,
  - ordre des tresses : $\beta < \beta'$ si $\beta^{-1}\beta'$ a un représentant σ-positif.

De nombreux algoritmes

Il existe plusieurs algorithmes donnant des représentants σ-définis.

De nombreux algoritmes

Il existe plusieurs algorithmes donnant des représentants σ-définis.

- Dehornoy' 91 : Algèbre auto-distributive

De nombreux algoritmes

Il existe plusieurs algorithmes donnant des représentants σ-définis.

- Dehornoy' 91 : Algèbre auto-distributive
- Larue' 93 : Algèbre auto-distributive

De nombreux algoritmes

Il existe plusieurs algorithmes donnant des représentants σ-définis.

- Dehornoy' 91 : Algèbre auto-distributive
- Larue' 93 : Algèbre auto-distributive
- Burckel' 94 : Combinatoire finie et induction ordinale

De nombreux algoritmes

Il existe plusieurs algorithmes donnant des représentants σ-définis.

- Dehornoy' 91 : Algèbre auto-distributive
- Larue' 93 : Algèbre auto-distributive
- Burckel' 94 : Combinatoire finie et induction ordinale
- Dehornoy' 97 : Poignées et graphe de Cayley

De nombreux algoritmes

Il existe plusieurs algorithmes donnant des représentants σ-définis.

- Dehornoy' 91 : Algèbre auto-distributive
- Larue' 93 : Algèbre auto-distributive
- Burckel' 94 : Combinatoire finie et induction ordinale
- Dehornoy' 97 : Poignées et graphe de Cayley
- F–G–R–R–W' 99 : Diagrammes de courbe du disque troué

De nombreux algoritmes

Il existe plusieurs algorithmes donnant des représentants σ-définis.

- Dehornoy' 91 : Algèbre auto-distributive
- Larue' 93 : Algèbre auto-distributive
- Burckel' 94 : Combinatoire finie et induction ordinale
- Dehornoy' 97 : Poignées et graphe de Cayley
- F–G–R–R–W' 99 : Diagrammes de courbe du disque troué
- Dynnikov-Wiest' 06 : Laminations du disque troué

De nombreux algoritmes

Il existe plusieurs algorithmes donnant des représentants σ-définis.

- Dehornoy' 91 : Algèbre auto-distributive
- Larue' 93 : Algèbre auto-distributive
- Burckel' 94 : Combinatoire finie et induction ordinale
- Dehornoy' 97 : Poignées et graphe de Cayley
- F–G–R–R–W' 99 : Diagrammes de courbe du disque troué
- Dynnikov-Wiest' 06 : Laminations du disque troué
- Bressaud' 06 : Lacets du disque troué ou Tetris

De nombreux algoritmes

Il existe plusieurs algorithmes donnant des représentants σ-définis.

- Dehornoy' 91 : Algèbre auto-distributive
- Larue' 93 : Algèbre auto-distributive
- Burckel' 94 : Combinatoire finie et induction ordinale
- Dehornoy' 97 : Poignées et graphe de Cayley
- F–G–R–R–W' 99 : Diagrammes de courbe du disque troué
- Dynnikov-Wiest' 06 : Laminations du disque troué
- Bressaud' 06 : Lacets du disque troué ou Tetris

- Question : Quelle sont les complexités ?

- Question : Quelle est la longueur du mot σ-défini retourné ?

- Question : Quelle est la longueur du mot σ-défini retourné ?

- Dehornoy' 91 : Algèbre auto-distributive
- Larue' 93 : Algèbre auto-distributive
- Burckel' 94 : Combinatoire finie et induction ordinale
- Dehornoy' 97 : Poignées et graphe de Cayley
- F–G–R–R–W' 99 : Diagrammes de courbe du disque troué
- Dynnikov-Wiest' 06 : Laminations du disque troué
- Bressaud' 06 : Lacets du disque troué ou Tetris

- Question : Quelle est la longueur du mot σ-défini retourné ?

$\leqslant e^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{e^{\ell}}}}}$

- Dehornoy' 91 : Algèbre auto-distributive
- Larue' 93 : Algèbre auto-distributive
- Burckel' 94 : Combinatoire finie et induction ordinale
- Dehornoy' 97 : Poignées et graphe de Cayley
- F–G–R–R–W' 99 : Diagrammes de courbe du disque troué
- Dynnikov-Wiest' 06 : Laminations du disque troué
- Bressaud' 06 : Lacets du disque troué ou Tetris

- Question : Quelle est la longueur du mot σ-défini retourné ?

- Dehornoy' 91 : Algèbre auto-distributive $\leqslant e^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{e^{\ell}}}}}$
- Larue' 93 : Algèbre auto-distributive $\leqslant e^{\ell}$
- Burckel' 94 : Combinatoire finie et induction ordinale
- Dehornoy' 97 : Poignées et graphe de Cayley
- F–G–R–R–W' 99 : Diagrammes de courbe du disque troué
- Dynnikov-Wiest' 06 : Laminations du disque troué
- Bressaud' 06 : Lacets du disque troué ou Tetris

- Question : Quelle est la longueur du mot σ-défini retourné ?

- Dehornoy' 91 : Algèbre auto-distributive $\leqslant e^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{e^{\ell}}}}}$
- Larue' 93 : Algèbre auto-distributive $\leqslant e^{\ell}$
- Burckel' 94 : Combinatoire finie et induction ordinale ??
- Dehornoy' 97 : Poignées et graphe de Cayley
- F–G–R–R–W' 99 : Diagrammes de courbe du disque troué
- Dynnikov-Wiest' 06 : Laminations du disque troué
- Bressaud' 06 : Lacets du disque troué ou Tetris

- Question : Quelle est la longueur du mot σ-défini retourné ?

- Dehornoy' 91 : Algèbre auto-distributive $\leqslant e^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{e^{\ell}}}}}$
- Larue' 93 : Algèbre auto-distributive $\leqslant e^{\ell}$
- Burckel' 94 : Combinatoire finie et induction ordinale ??
- Dehornoy' 97 : Poignées et graphe de Cayley $\leqslant e^{\ell}$
- F–G–R–R–W' 99 : Diagrammes de courbe du disque troué
- Dynnikov-Wiest' 06 : Laminations du disque troué
- Bressaud' 06 : Lacets du disque troué ou Tetris

- Question : Quelle est la longueur du mot σ-défini retourné ?

- Dehornoy' 91 : Algèbre auto-distributive $\leqslant e^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{e^{\ell}}}}}$
- Larue' 93 : Algèbre auto-distributive $\leqslant e^{\ell}$
- Burckel' 94 : Combinatoire finie et induction ordinale ??
- Dehornoy' 97 : Poignées et graphe de Cayley $\leqslant e^{\ell}$
- F–G–R–R–W' 99 : Diagrammes de courbe du disque troué $\leqslant e^{\ell}$
- Dynnikov-Wiest' 06 : Laminations du disque troué
- Bressaud' 06 : Lacets du disque troué ou Tetris

- Question : Quelle est la longueur du mot σ-défini retourné ?

- Dehornoy' 91 : Algèbre auto-distributive $\leqslant e^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{e^{\ell}}}}}$
- Larue' 93 : Algèbre auto-distributive $\leqslant e^{\ell}$
- Burckel' 94 : Combinatoire finie et induction ordinale ??
- Dehornoy' 97 : Poignées et graphe de Cayley $\leqslant e^{\ell}$
- F–G–R–R–W' 99 : Diagrammes de courbe du disque troué $\leqslant e^{\ell}$
- Dynnikov-Wiest' 06 : Laminations du disque troué $\leqslant e^{\ell}$
- Bressaud' 06 : Lacets du disque troué ou Tetris

- Question : Quelle est la longueur du mot σ-défini retourné ?

- Dehornoy' 91 : Algèbre auto-distributive $\leqslant e^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{e^{\ell}}}}}$
- Larue' 93 : Algèbre auto-distributive $\leqslant e^{\ell}$
- Burckel' 94 : Combinatoire finie et induction ordinale ??
- Dehornoy' 97 : Poignées et graphe de Cayley $\leqslant e^{\ell}$
- F–G–R–R–W' 99 : Diagrammes de courbe du disque troué $\leqslant e^{\ell}$
- Dynnikov-Wiest' 06 : Laminations du disque troué $\leqslant e^{\ell}$
- Bressaud' 06 : Lacets du disque troué ou Tetris $\leqslant e^{\ell}$

- Question : Quelle est la longueur du mot σ-défini retourné ?

- Dehornoy' 91 : Algèbre auto-distributive $\leqslant e^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{e^{\ell}}}}}$
- Larue' 93 : Algèbre auto-distributive $\leqslant e^{\ell}$
- Burckel' 94 : Combinatoire finie et induction ordinale ??
- Dehornoy' 97 : Poignées et graphe de Cayley $\leqslant e^{\ell}$
- F–G–R–R–W' 99 : Diagrammes de courbe du disque troué $\leqslant e^{\ell}$
- Dynnikov-Wiest' 06 : Laminations du disque troué $\leqslant e^{\ell}$
- Bressaud' 06 : Lacets du disque troué ou Tetris $\leqslant e^{\ell}$

- Conjecture : Soit w un mot de tresses à n brins de longueur ℓ, alors il existe un mot σ-défini w' équivalent à w vérifiant

- Question : Quelle est la longueur du mot σ-défini retourné ?

- Dehornoy' 91 : Algèbre auto-distributive $\leqslant e^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{e^{\ell}}}}}$
- Larue' 93 : Algèbre auto-distributive $\leqslant e^{\ell}$
- Burckel' 94 : Combinatoire finie et induction ordinale ??
- Dehornoy' 97 : Poignées et graphe de Cayley $\leqslant e^{\ell}$
- F–G–R–R–W' 99 : Diagrammes de courbe du disque troué $\leqslant e^{\ell}$
- Dynnikov-Wiest' 06 : Laminations du disque troué $\leqslant e^{\ell}$
- Bressaud' 06 : Lacets du disque troué ou Tetris $\leqslant e^{\ell}$

- Conjecture : Soit w un mot de tresses à n brins de longueur ℓ, alors il existe un mot σ-défini w' équivalent à w vérifiant $|w'| \leqslant C_n \cdot \ell$.

Résultas

• Théorème: Toute tresse β de B_n a un représentant σ-défini de longueur au plus

Résultas

• Théorème: Toute tresse β de B_n a un représentant σ-défini de longueur au plus $6(n-1)^2\|\beta\|_\sigma$

$\|\beta\|_\sigma$ est la longueur géodésique de β

Résultas

• Théorème: Toute tresse β de B_n a un représentant σ-défini de longueur au plus $6(n-1)^2\|\beta\|_\sigma$ calculable en temps $O(n^6\,\ell^2)$, si β est spécifiée par un mot de longueur ℓ.

$\|\beta\|_\sigma$ est la longueur géodésique de β

Résultas

• Théorème : Toute tresse β de B_n a un représentant σ-défini de longueur au plus $6(n-1)^2\|\beta\|_\sigma$ calculable en temps $O(n^6\,\ell^2)$, si β est spécifiée par un mot de longueur ℓ.

$\|\beta\|_\sigma$ est la longueur géodésique de β

• Problème : Trouver un représentant σ-défini d'une tresse de B_n.

Résultas

• Théorème : Toute tresse β de B_n a un représentant σ-défini de longueur au plus $6(n-1)^2\|\beta\|_\sigma$ calculable en temps $O(n^6\,\ell^2)$, si β est spécifiée par un mot de longueur ℓ.

$\|\beta\|_\sigma$ est la longueur géodésique de β

• Problème : Trouver un représentant σ-défini d'une tresse de B_n.

• Fait : Toute tresse de B_n est de la forme $\delta_n^{-t}\,\beta$ avec $\beta \in B_n^{+*}$.

Résultas

• Théorème : Toute tresse β de B_n a un représentant σ-défini de longueur au plus $6(n-1)^2\|\beta\|_\sigma$ calculable en temps $O(n^6\,\ell^2)$, si β est spécifiée par un mot de longueur ℓ.

$\|\beta\|_\sigma$ est la longueur géodésique de β

• Problème : Trouver un représentant σ-défini d'une tresse de B_n.

• Fait : Toute tresse de B_n est de la forme $\delta_n^{-t}\,\beta$ avec $\beta \in B_n^{+*}$.

• Problème : Trouver un mot σ-défini équivalent à $\delta_n^{-t}\,w$,
où w est un n-mot

Résultas

• Théorème : Toute tresse β de B_n a un représentant σ-défini de longueur au plus $6(n-1)^2\|\beta\|_\sigma$ calculable en temps $O(n^6\,\ell^2)$, si β est spécifiée par un mot de longueur ℓ.

$\|\beta\|_\sigma$ est la longueur géodésique de β

• Problème : Trouver un représentant σ-défini d'une tresse de B_n.

• Fait : Toute tresse de B_n est de la forme $\delta_n^{-t}\,\beta$ avec $\beta \in B_n^{+*}$.

• Problème : Trouver un mot σ-défini équivalent à $\delta_n^{-t}\,w$,
où w est un n-mot tournant

Résultas

• Théorème : Toute tresse β de B_n a un représentant σ-défini de longueur au plus $6(n-1)^2\|\beta\|_\sigma$ calculable en temps $O(n^6\,\ell^2)$, si β est spécifiée par un mot de longueur ℓ.

$\|\beta\|_\sigma$ est la longueur géodésique de β

• Problème : Trouver un représentant σ-défini d'une tresse de B_n.

• Fait : Toute tresse de B_n est de la forme $\delta_n^{-t}\,\beta$ avec $\beta \in B_n^{+*}$.

• Problème : Trouver un mot σ-défini équivalent à $\delta_n^{-t}\,w$,
où w est un n-mot tournant

• Théorème : La restriction de $<$ à B_n^{+*} est un bon ordre de type $\omega^{\omega^{n-2}}$.

Dernière lettre

- Soit $(\beta_b, \dots, \beta_1)$ un ϕ_n-éclatement

Dernière lettre

- Soit $(\beta_b, \dots, \beta_1)$ un ϕ_n-éclatement

- Lemme :
  - Pour $k \geqslant 3$, la tresse β_k est non triviale.
  - Pour $k \geqslant 2$, la dernière lettre de la f.n.t de β_k est $a_{..,n-1}$

Dernière lettre

- Soit $(\beta_b, \dots, \beta_1)$ un ϕ_n-éclatement

- Lemme :
  - Pour $k \geqslant 3$, la tresse β_k est non triviale.
  - Pour $k \geqslant 2$, la dernière lettre de la f.n.t de β_k est $a_{..,n-1}$, sauf si β_k est triviale.

Dernière lettre

- Soit $(\beta_b, \dots, \beta_1)$ un ϕ_n-éclatement

- Lemme :
  - Pour $k \geqslant 3$, la tresse β_k est non triviale.
  - Pour $k \geqslant 2$, la dernière lettre de la f.n.t de β_k est $a_{..,n-1}$, sauf si β_k est triviale.

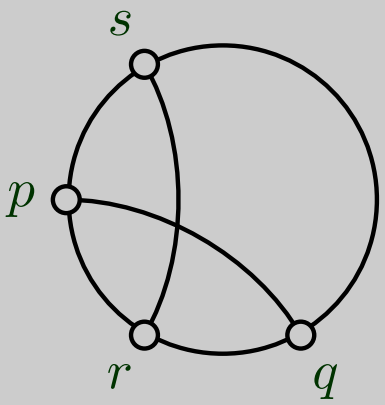
$\Leftrightarrow$ la B_{n-1}^{+*}-fin de β_k est triviale

Barrière

- Définition : On dit que la lettre $a_{p,q}$ est une $a_{r,s}$-barrière si on a

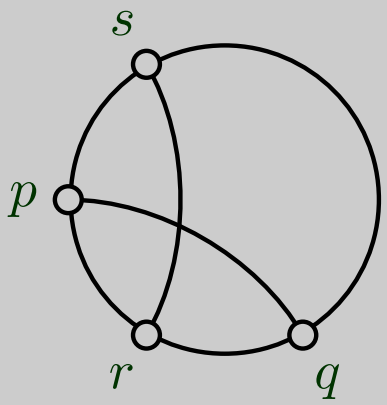
Barrière

- Définition : On dit que la lettre $a_{p,q}$ est une $a_{r,s}$-barrière si on a



Barrière

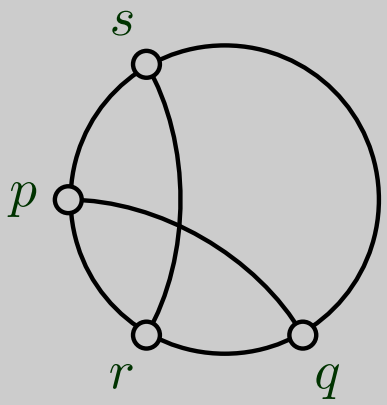
- Définition : On dit que la lettre $a_{p,q}$ est une $a_{r,s}$-barrière si on a



- Soit $(\beta_b, \dots, \beta_1)$ un ϕ_n-éclatement

Barrière

- Définition : On dit que la lettre $a_{p,q}$ est une $a_{r,s}$-barrière si on a

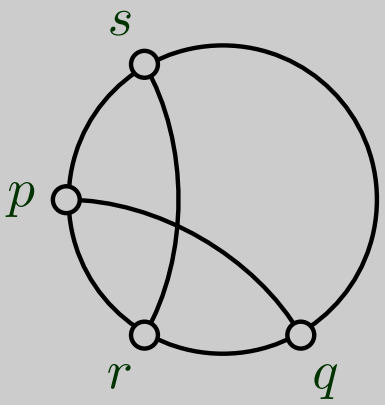


- Soit $(\beta_b, \dots, \beta_1)$ un ϕ_n-éclatement

- Proposition : Pour $k \geqslant 3$, la f.n.t de β_{k-1} contient une $\phi_n(\beta_k^{\#})$-barrière.

Barrière

- Définition : On dit que la lettre $a_{p,q}$ est une $a_{r,s}$-barrière si on a



- Soit $(\beta_b, \dots, \beta_1)$ un ϕ_n-éclatement

- Proposition : Pour $k \geqslant 3$, la f.n.t de β_{k-1} contient une $\phi_n(\beta_k^{\#})$-barrière.

où $\gamma^{\#}$ est la dernière lettre de la f.n.t de γ

Reconnaître un mot tournant

- Théorème : Soit $(w_b, ..., w_1)$ une suite de $(n-1)$-mots.

Reconnaître un mot tournant

- Théorème : Soit $(w_b, ..., w_1)$ une suite de $(n-1)$-mots. Alors le n-mot

$$\phi_n^{b-1}(w_b) \cdot ... \cdot \phi_n(w_2) \cdot w_1$$

est tournant si et seulement si les conditions suivantes sont vérifiées :

Reconnaître un mot tournant

- Théorème : Soit $(w_b, ..., w_1)$ une suite de $(n-1)$-mots. Alors le n-mot

$$\phi_n^{b-1}(w_b) \cdot ... \cdot \phi_n(w_2) \cdot w_1$$

est tournant si et seulement si les conditions suivantes sont vérifiées :

- pour $k \geqslant 1$, le mot w_k est tournant,

Reconnaître un mot tournant

- Théorème : Soit $(w_b, ..., w_1)$ une suite de $(n-1)$-mots. Alors le n-mot

$$\phi_n^{b-1}(w_b) \cdot ... \cdot \phi_n(w_2) \cdot w_1$$

est tournant si et seulement si les conditions suivantes sont vérifiées :

- pour $k \geqslant 1$, le mot w_k est tournant,
- le mot w_2 est soit vide, soit se termine par $a_{..,n-1}$,

Reconnaître un mot tournant

- **Théorème :** Soit $(w_b, ..., w_1)$ une suite de $(n-1)$-mots. Alors le n-mot

$$\phi_n^{b-1}(w_b) \cdot ... \cdot \phi_n(w_2) \cdot w_1$$

est tournant si et seulement si les conditions suivantes sont vérifiées :

- pour $k \geqslant 1$, le mot w_k est tournant,
- le mot w_2 est soit vide, soit se termine par $a_{..,n-1}$,
- pour $k \geqslant 3$, le mot w_k se termine par $a_{..,n-1}$,

Reconnaître un mot tournant

- Théorème : Soit $(w_b, ..., w_1)$ une suite de $(n-1)$-mots. Alors le n-mot

$$\phi_n^{b-1}(w_b) \cdot ... \cdot \phi_n(w_2) \cdot w_1$$

est tournant si et seulement si les conditions suivantes sont vérifiées :

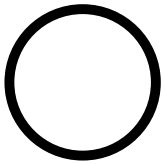
- pour $k \geqslant 1$, le mot w_k est tournant,
- le mot w_2 est soit vide, soit se termine par $a_{..,n-1}$,
- pour $k \geqslant 3$, le mot w_k se termine par $a_{..,n-1}$,
- si, pour $k \geqslant 3$, le mot w_k se termine par $a_{p-1,n-1}$ avec $p \neq n-1$, alors le mot w_{k-1} contient une $a_{p,n}$-barrière.

Automate pour 2 brins

- Fait : Tout 2-mot est tournant.

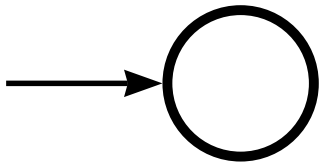
Automate pour 2 brins

- Fait : Tout 2-mot est tournant.



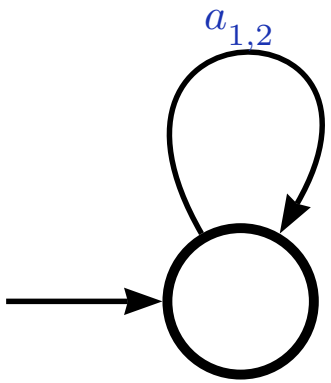
Automate pour 2 brins

- Fait : Tout 2-mot est tournant.



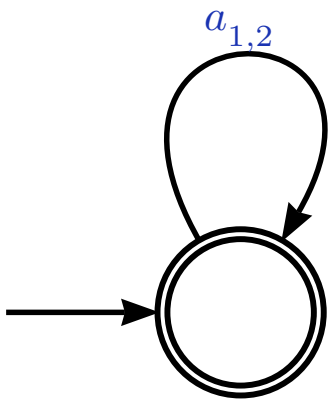
Automate pour 2 brins

- Fait : Tout 2-mot est tournant.



Automate pour 2 brins

- Fait : Tout 2-mot est tournant.



Automate pour 3 brins

Automate pour 3 brins

- Corollaire : Soit $(w_b, ..., w_1)$ une suite de 2-mots. Alors le 3-mot

$$\phi_3^{b-1}(w_b) \cdot ... \cdot \phi_3(w_2) \cdot w_1$$

est tournant ssi les conditions suivantes sont vérifiées :

Automate pour 3 brins

- Corollaire : Soit $(w_b, ..., w_1)$ une suite de 2-mots. Alors le 3-mot

$$\phi_3^{b-1}(w_b) \cdot ... \cdot \phi_3(w_2) \cdot w_1$$

est tournant ssi les conditions suivantes sont vérifiées :

- pour $k \geqslant 1$, le mot w_k est tournant,
- le mot w_2 est soit vide, soit se termine par $a_{..,n-1}$,
- pour $k \geqslant 3$, le mot w_k se termine par $a_{..,n-1}$,
- si, pour $k \geqslant 3$, le mot w_k se termine par $a_{p-1,n-1}$ avec $p \neq n-1$, alors le mot w_{k-1} contient une $a_{p,n}$-barrière.

Automate pour 3 brins

- Corollaire : Soit $(w_b, ..., w_1)$ une suite de 2-mots. Alors le 3-mot

$$\phi_3^{b-1}(w_b) \cdot ... \cdot \phi_3(w_2) \cdot w_1$$

est tournant ssi les conditions suivantes sont vérifiées :

- pour $k \geqslant 1$, le mot w_k est tournant,
- le mot w_2 est soit vide, soit se termine par $a_{..,n-1}$,
- pour $k \geqslant 3$, le mot w_k se termine par $a_{..,n-1}$,
- si, pour $k \geqslant 3$, le mot w_k se termine par $a_{p-1,n-1}$ avec $p \neq n-1$, alors le mot w_{k-1} contient une $a_{p,n}$-barrière.

Automate pour 3 brins

- Corollaire : Soit $(w_b, ..., w_1)$ une suite de 2-mots. Alors le 3-mot

$$\phi_3^{b-1}(w_b) \cdot ... \cdot \phi_3(w_2) \cdot w_1$$

est tournant ssi les conditions suivantes sont vérifiées :

–
– le mot w_2 est soit vide, soit se termine par $a_{..,n-1}$,
– pour $k \geqslant 3$, le mot w_k se termine par $a_{..,n-1}$,
– si, pour $k \geqslant 3$, le mot w_k se termine par $a_{p-1,n-1}$ avec $p \neq n-1$, alors le mot w_{k-1} contient une $a_{p,n}$-barrière.

Automate pour 3 brins

- Corollaire : Soit $(w_b, ..., w_1)$ une suite de 2-mots. Alors le 3-mot

$$\phi_3^{b-1}(w_b) \cdot ... \cdot \phi_3(w_2) \cdot w_1$$

est tournant ssi les conditions suivantes sont vérifiées :

-
- le mot w_2 est soit vide, soit se termine par $a_{..,n-1}$,
- pour $k \geqslant 3$, le mot w_k se termine par $a_{..,n-1}$,
- si, pour $k \geqslant 3$, le mot w_k se termine par $a_{p-1,n-1}$ avec $p \neq n-1$, alors le mot w_{k-1} contient une $a_{p,n}$-barrière.

Automate pour 3 brins

- Corollaire : Soit $(w_b, ..., w_1)$ une suite de 2-mots. Alors le 3-mot

$$\phi_3^{b-1}(w_b) \cdot ... \cdot \phi_3(w_2) \cdot w_1$$

est tournant ssi les conditions suivantes sont vérifiées :

-
-
- pour $k \geqslant 3$, le mot w_k se termine par $a_{..,n-1}$,
- si, pour $k \geqslant 3$, le mot w_k se termine par $a_{p-1,n-1}$ avec $p \neq n-1$, alors le mot w_{k-1} contient une $a_{p,n}$-barrière.

Automate pour 3 brins

- Corollaire : Soit $(w_b, ..., w_1)$ une suite de 2-mots. Alors le 3-mot

$$\phi_3^{b-1}(w_b) \cdot ... \cdot \phi_3(w_2) \cdot w_1$$

est tournant ssi les conditions suivantes sont vérifiées :

-
-
- pour $k \geqslant 3$, le mot w_k se termine par $a_{..,n-1}$,
- si, pour $k \geqslant 3$, le mot w_k se termine par $a_{p-1,n-1}$ avec $p \neq n-1$, alors le mot w_{k-1} contient une $a_{p,n}$-barrière.

Automate pour 3 brins

- Corollaire : Soit $(w_b, ..., w_1)$ une suite de 2-mots. Alors le 3-mot

$$\phi_3^{b-1}(w_b) \cdot ... \cdot \phi_3(w_2) \cdot w_1$$

est tournant ssi les conditions suivantes sont vérifiées :

–

–

– pour $k \geqslant 3$, le mot w_k est non-vide,

– si, pour $k \geqslant 3$, le mot w_k se termine par $a_{p-1,n-1}$ avec $p \neq n-1$, alors le mot w_{k-1} contient une $a_{p,n}$-barrière.

Automate pour 3 brins

- Corollaire : Soit $(w_b, ..., w_1)$ une suite de 2-mots. Alors le 3-mot

$$\phi_3^{b-1}(w_b) \cdot ... \cdot \phi_3(w_2) \cdot w_1$$

est tournant ssi les conditions suivantes sont vérifiées :

-
-
- pour $k \geqslant 3$, le mot w_k est non-vide,
- si, pour $k \geqslant 3$, le mot w_k se termine par $a_{p-1,n-1}$ avec $p \neq n-1$, alors le mot w_{k-1} contient une $a_{p,n}$-barrière.

Automate pour 3 brins

- Corollaire : Soit $(w_b, ..., w_1)$ une suite de 2-mots. Alors le 3-mot

$$\phi_3^{b-1}(w_b) \cdot ... \cdot \phi_3(w_2) \cdot w_1$$

est tournant ssi les conditions suivantes sont vérifiées :

-
-
- pour $k \geqslant 3$, le mot w_k est non-vide,
-

Automate pour 3 brins

- Corollaire : Soit $(w_b, ..., w_1)$ une suite de 2-mots. Alors le 3-mot

$$\phi_3^{b-1}(w_b) \cdot ... \cdot \phi_3(w_2) \cdot w_1$$

est tournant ssi les conditions suivantes sont vérifiées :

-
- pour $k \geqslant 3$, le mot w_k est non-vide,
-
-

Automate pour 3 brins

- Corollaire : Soit $(w_b, ..., w_1)$ une suite de 2-mots. Alors le 3-mot

$$\phi_3^{b-1}(w_b) \cdot ... \cdot \phi_3(w_2) \cdot w_1$$

est tournant ssi les conditions suivantes sont vérifiées :

– pour $k \geqslant 3$, le mot w_k est non-vide,

–

–

–

Automate pour 3 brins

- Corollaire : Soit $(w_b, ..., w_1)$ une suite de 2-mots. Alors le 3-mot

$$\phi_3^{b-1}(w_b) \cdot ... \cdot \phi_3(w_2) \cdot w_1$$

est tournant ssi le mot w_k est non-vide pour $k \geqslant 3$.

  –
  –
  –
  –

Automate pour 3 brins

- Corollaire : Soit $(w_b, ..., w_1)$ une suite de 2-mots. Alors le 3-mot
$$\phi_3^{b-1}(w_b) \cdot ... \cdot \phi_3(w_2) \cdot w_1$$
est tournant ssi le mot w_k est non-vide pour $k \geqslant 3$.

$\rightsquigarrow$ Un mot $...a_{1,3}^{e_6} a_{2,3}^{e_5} a_{1,2}^{e_4} a_{1,3}^{e_3} a_{2,3}^{e_2} a_{1,2}^{e_1}$ est tournant ssi $e_k \geqslant 1$ pour $k \geqslant 3$.

Automate pour 3 brins

- Corollaire : Soit $(w_b, ..., w_1)$ une suite de 2-mots. Alors le 3-mot
$$\phi_3^{b-1}(w_b) \cdot ... \cdot \phi_3(w_2) \cdot w_1$$
est tournant ssi le mot w_k est non-vide pour $k \geqslant 3$.

$\rightsquigarrow$ Un mot $...a_{1,3}^{e_6} a_{2,3}^{e_5} a_{1,2}^{e_4} a_{1,3}^{e_3} a_{2,3}^{e_2} a_{1,2}^{e_1}$ est tournant ssi $e_k \geqslant 1$ pour $k \geqslant 3$.

Automate pour 3 brins

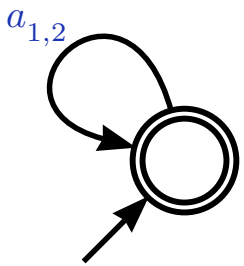
- Corollaire : Soit $(w_b, ..., w_1)$ une suite de 2-mots. Alors le 3-mot
$$\phi_3^{b-1}(w_b) \cdot ... \cdot \phi_3(w_2) \cdot w_1$$
est tournant ssi le mot w_k est non-vide pour $k \geqslant 3$.

$\rightsquigarrow$ Un mot $...a_{1,3}^{e_6} a_{2,3}^{e_5} a_{1,2}^{e_4} a_{1,3}^{e_3} a_{2,3}^{e_2} a_{1,2}^{e_1}$ est tournant ssi $e_k \geqslant 1$ pour $k \geqslant 3$.

Automate pour 3 brins

- Corollaire : Soit $(w_b, ..., w_1)$ une suite de 2-mots. Alors le 3-mot
$$\phi_3^{b-1}(w_b) \cdot ... \cdot \phi_3(w_2) \cdot w_1$$
est tournant ssi le mot w_k est non-vide pour $k \geqslant 3$.

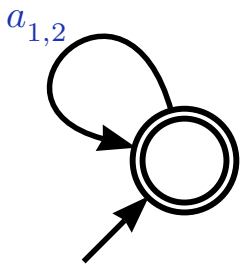
$\rightsquigarrow$ Un mot $...a_{1,3}^{e_6} a_{2,3}^{e_5} a_{1,2}^{e_4} a_{1,3}^{e_3} a_{2,3}^{e_2} a_{1,2}^{e_1}$ est tournant ssi $e_k \geqslant 1$ pour $k \geqslant 3$.



Automate pour 3 brins

- Corollaire : Soit $(w_b, ..., w_1)$ une suite de 2-mots. Alors le 3-mot
$$\phi_3^{b-1}(w_b) \cdot ... \cdot \phi_3(w_2) \cdot w_1$$
est tournant ssi le mot w_k est non-vide pour $k \geqslant 3$.

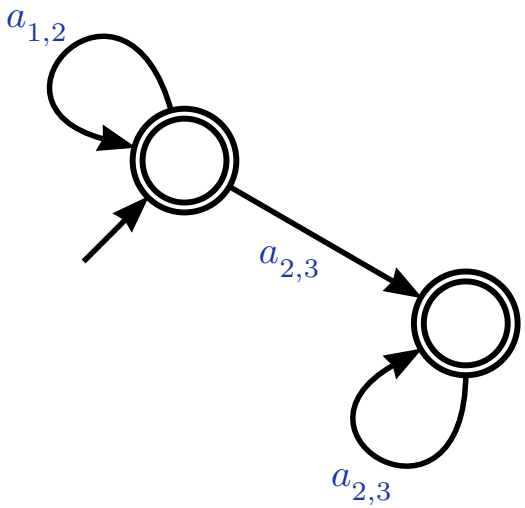
$\rightsquigarrow$ Un mot $...a_{1,3}^{e_6} a_{2,3}^{e_5} a_{1,2}^{e_4} a_{1,3}^{e_3} a_{2,3}^{e_2} a_{1,2}^{e_1}$ est tournant ssi $e_k \geqslant 1$ pour $k \geqslant 3$.



Automate pour 3 brins

- Corollaire : Soit $(w_b, ..., w_1)$ une suite de 2-mots. Alors le 3-mot
$$\phi_3^{b-1}(w_b) \cdot ... \cdot \phi_3(w_2) \cdot w_1$$
est tournant ssi le mot w_k est non-vide pour $k \geqslant 3$.

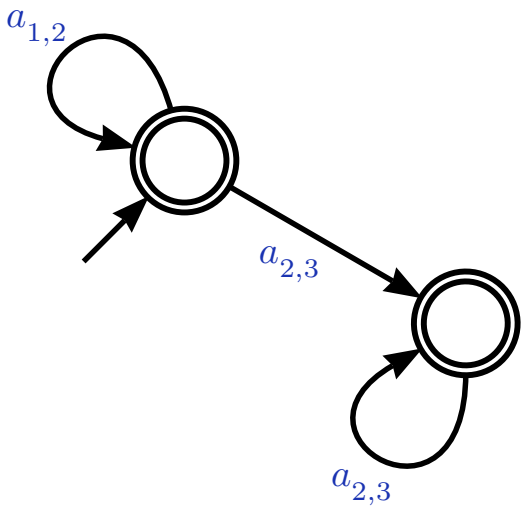
$\rightsquigarrow$ Un mot $...a_{1,3}^{e_6} a_{2,3}^{e_5} a_{1,2}^{e_4} a_{1,3}^{e_3} a_{2,3}^{e_2} a_{1,2}^{e_1}$ est tournant ssi $e_k \geqslant 1$ pour $k \geqslant 3$.



Automate pour 3 brins

- Corollaire : Soit $(w_b, ..., w_1)$ une suite de 2-mots. Alors le 3-mot
$$\phi_3^{b-1}(w_b) \cdot ... \cdot \phi_3(w_2) \cdot w_1$$
est tournant ssi le mot w_k est non-vide pour $k \geqslant 3$.

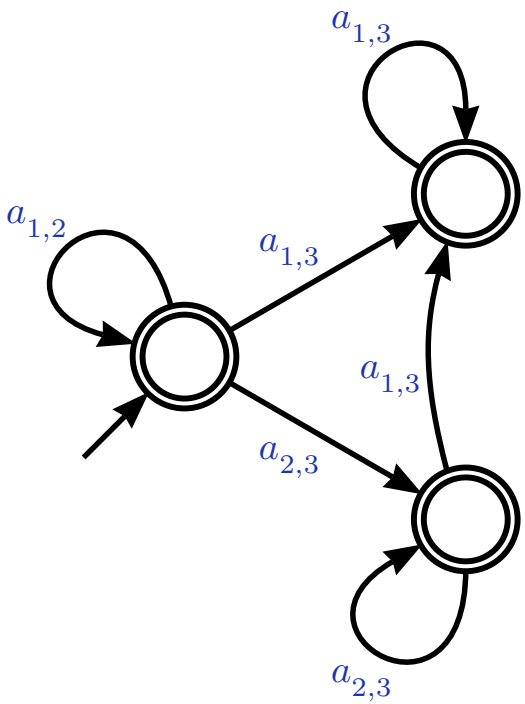
$\rightsquigarrow$ Un mot $...a_{1,3}^{e_6} a_{2,3}^{e_5} a_{1,2}^{e_4} a_{1,3}^{e_3} a_{2,3}^{e_2} a_{1,2}^{e_1}$ est tournant ssi $e_k \geqslant 1$ pour $k \geqslant 3$.



Automate pour 3 brins

- Corollaire : Soit $(w_b, ..., w_1)$ une suite de 2-mots. Alors le 3-mot
$$\phi_3^{b-1}(w_b) \cdot ... \cdot \phi_3(w_2) \cdot w_1$$
est tournant ssi le mot w_k est non-vide pour $k \geqslant 3$.

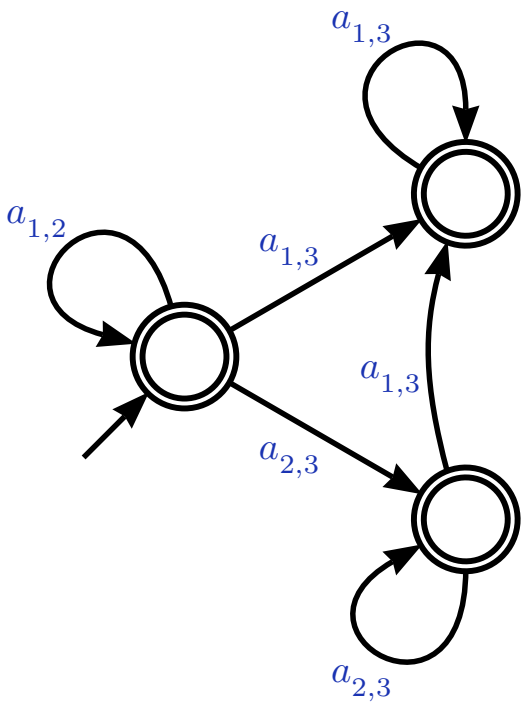
$\rightsquigarrow$ Un mot $...a_{1,3}^{e_6} a_{2,3}^{e_5} a_{1,2}^{e_4} a_{1,3}^{e_3} a_{2,3}^{e_2} a_{1,2}^{e_1}$ est tournant ssi $e_k \geqslant 1$ pour $k \geqslant 3$.



Automate pour 3 brins

- Corollaire : Soit $(w_b, ..., w_1)$ une suite de 2-mots. Alors le 3-mot
$$\phi_3^{b-1}(w_b) \cdot ... \cdot \phi_3(w_2) \cdot w_1$$
est tournant ssi le mot w_k est non-vide pour $k \geqslant 3$.

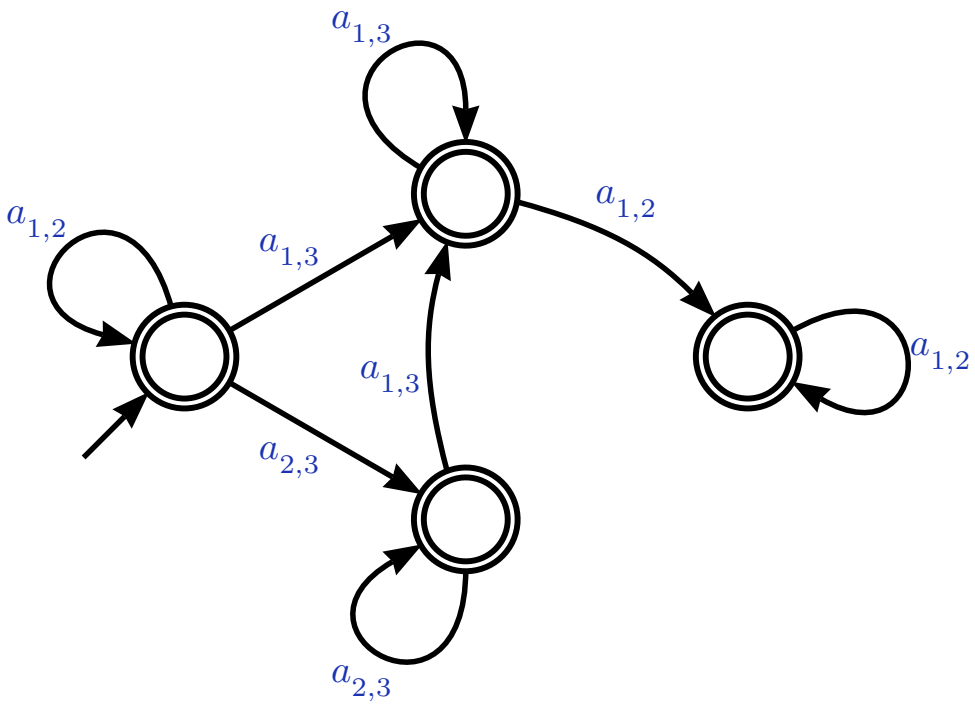
$\rightsquigarrow$ Un mot $...a_{1,3}^{e_6} a_{2,3}^{e_5} a_{1,2}^{e_4} a_{1,3}^{e_3} a_{2,3}^{e_2} a_{1,2}^{e_1}$ est tournant ssi $e_k \geqslant 1$ pour $k \geqslant 3$.



Automate pour 3 brins

- Corollaire : Soit $(w_b, ..., w_1)$ une suite de 2-mots. Alors le 3-mot
$$\phi_3^{b-1}(w_b) \cdot ... \cdot \phi_3(w_2) \cdot w_1$$
est tournant ssi le mot w_k est non-vide pour $k \geqslant 3$.

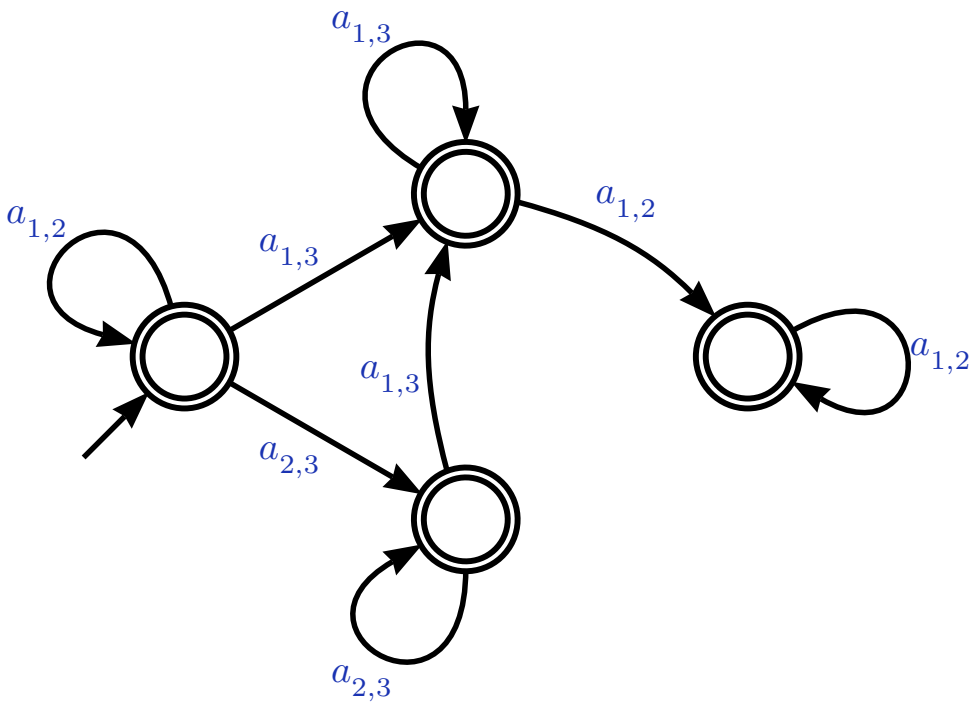
$\rightsquigarrow$ Un mot $...a_{1,3}^{e_6} a_{2,3}^{e_5} a_{1,2}^{e_4} a_{1,3}^{e_3} a_{2,3}^{e_2} a_{1,2}^{e_1}$ est tournant ssi $e_k \geqslant 1$ pour $k \geqslant 3$.



Automate pour 3 brins

- Corollaire : Soit $(w_b, ..., w_1)$ une suite de 2-mots. Alors le 3-mot
$$\phi_3^{b-1}(w_b) \cdot ... \cdot \phi_3(w_2) \cdot w_1$$
est tournant ssi le mot w_k est non-vide pour $k \geqslant 3$.

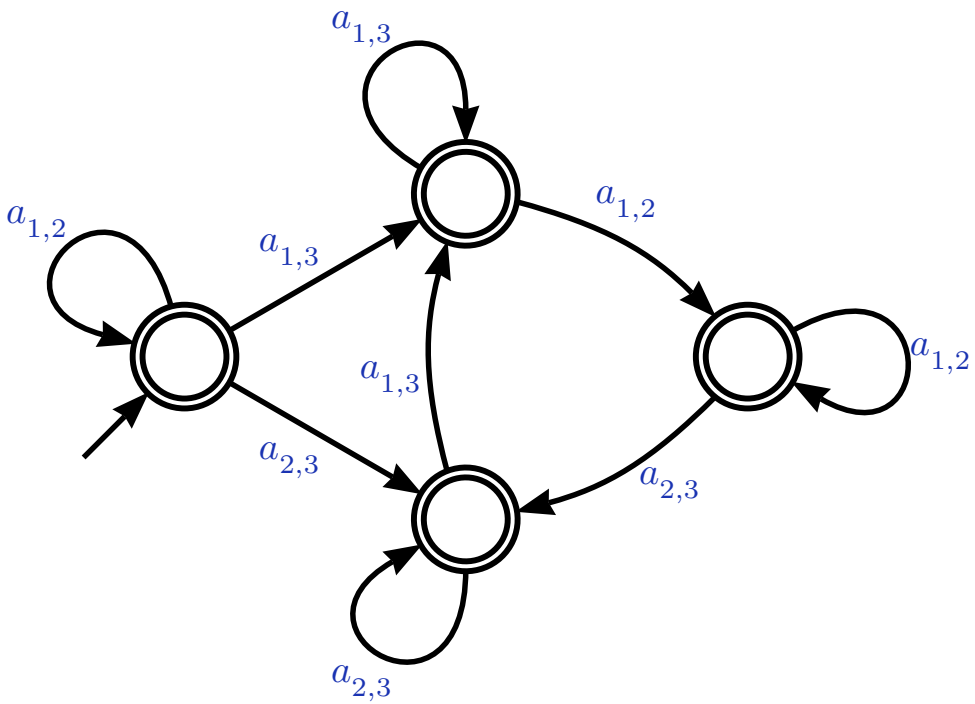
$\rightsquigarrow$ Un mot $...a_{1,3}^{e_6} a_{2,3}^{e_5} a_{1,2}^{e_4} a_{1,3}^{e_3} a_{2,3}^{e_2} a_{1,2}^{e_1}$ est tournant ssi $e_k \geqslant 1$ pour $k \geqslant 3$.



Automate pour 3 brins

- Corollaire : Soit $(w_b, ..., w_1)$ une suite de 2-mots. Alors le 3-mot
$$\phi_3^{b-1}(w_b) \cdot ... \cdot \phi_3(w_2) \cdot w_1$$
est tournant ssi le mot w_k est non-vide pour $k \geqslant 3$.

$\rightsquigarrow$ Un mot $...a_{1,3}^{e_6} a_{2,3}^{e_5} a_{1,2}^{e_4} a_{1,3}^{e_3} a_{2,3}^{e_2} a_{1,2}^{e_1}$ est tournant ssi $e_k \geqslant 1$ pour $k \geqslant 3$.



Automate pour 4 brins

Automate pour 4 brins

- But : Construire un automate reconnaissant si le mot

$$\phi_4^{b-1}(w_b) \cdot \ldots \cdot \phi_4(w_2) \cdot w_1$$

est tournant, où $(w_b, \ldots, w_1)$ est une suite de 3-mots.

Automate pour 4 brins

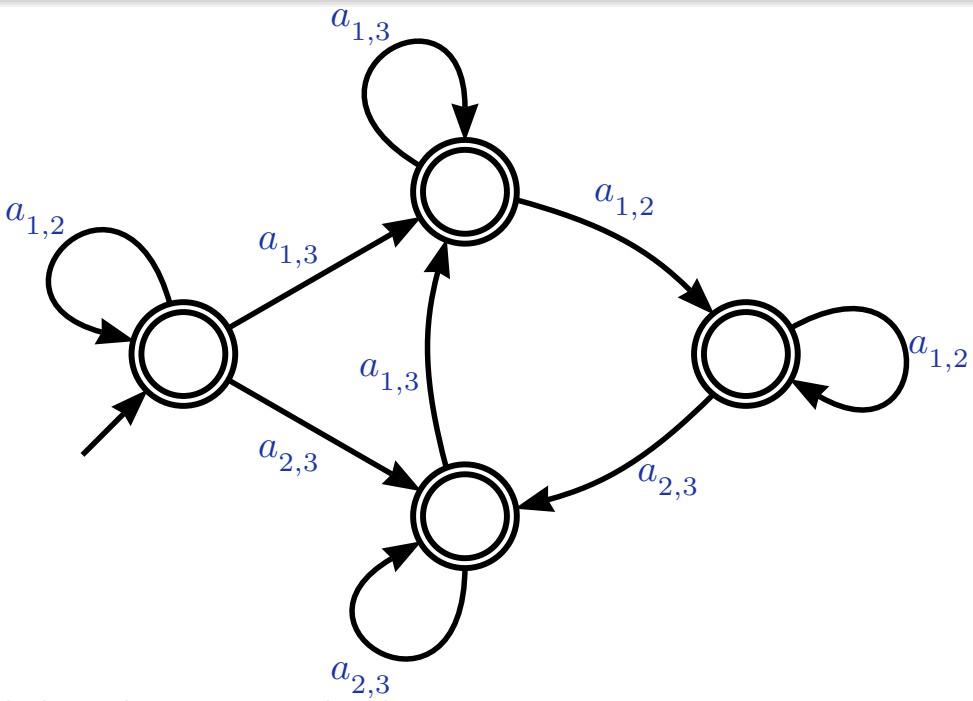
- But : Construire un automate reconnaissant si le mot
$$\phi_4^{b-1}(w_b) \cdot \ldots \cdot \phi_4(w_2) \cdot w_1$$
est tournant, où $(w_b, \ldots, w_1)$ est une suite de 3-mots.

- Condition 1 : Le mot w_k est tournant pour $k \geqslant 1$.

Automate pour 4 brins

- But : Construire un automate reconnaissant si le mot
$$\phi_4^{b-1}(w_b) \cdot \ldots \cdot \phi_4(w_2) \cdot w_1$$
est tournant, où $(w_b, \ldots, w_1)$ est une suite de 3-mots.

- Condition 1 : Le mot w_k est tournant pour $k \geqslant 1$.

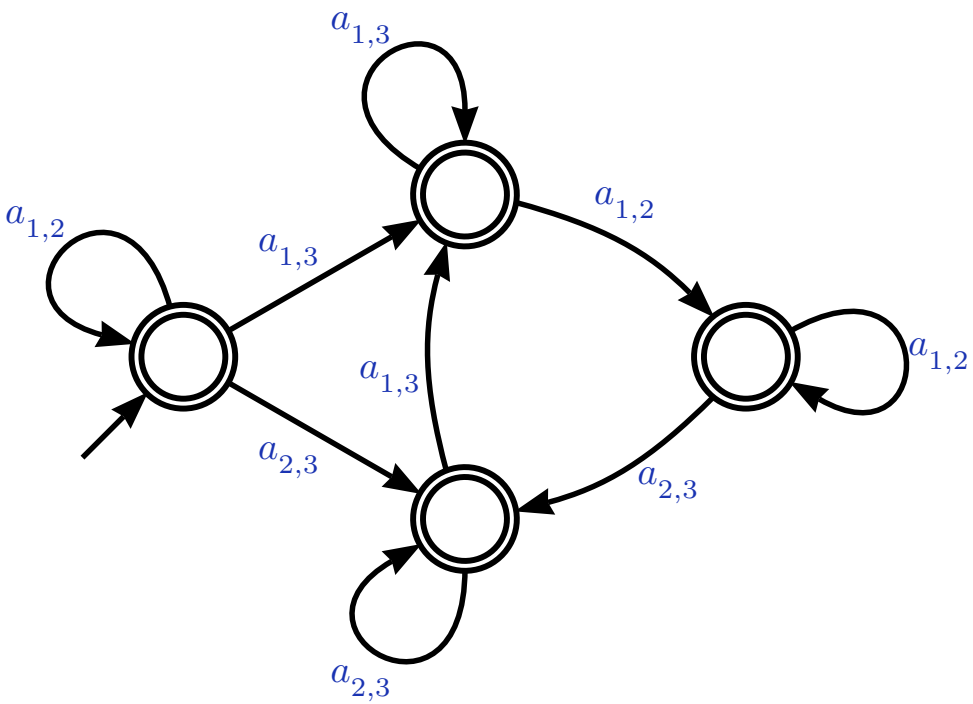


Automate pour 4 brins

- Condition 2 : Le mot w_k se termine par $a_{..,3}$ pour $k \geqslant 3$.

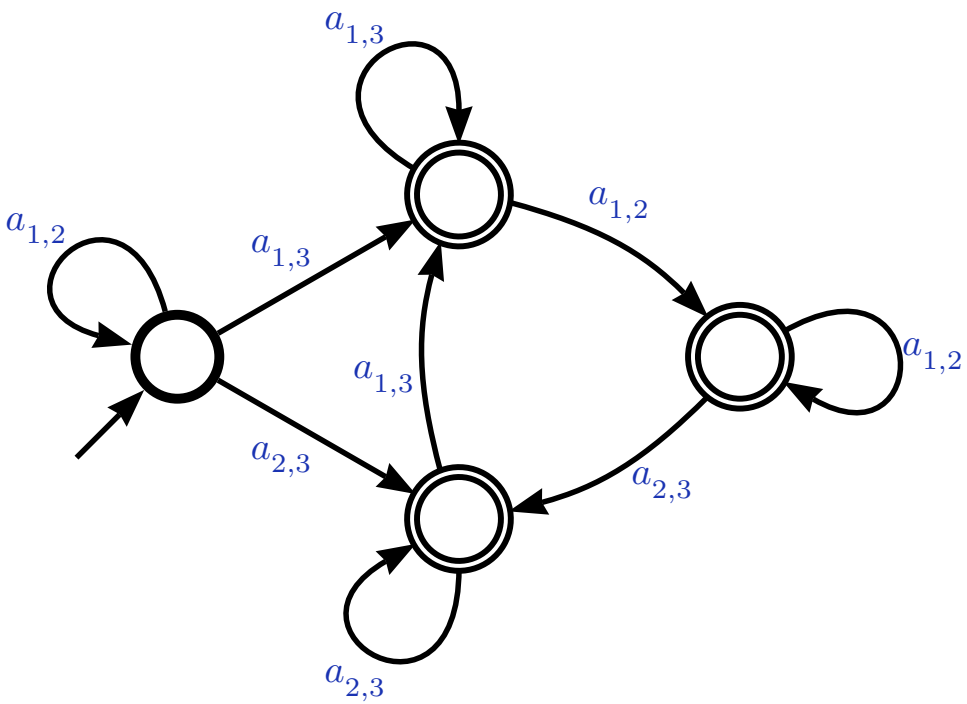
Automate pour 4 brins

- Condition 2 : Le mot w_k se termine par $a_{..,3}$ pour $k \geqslant 3$.



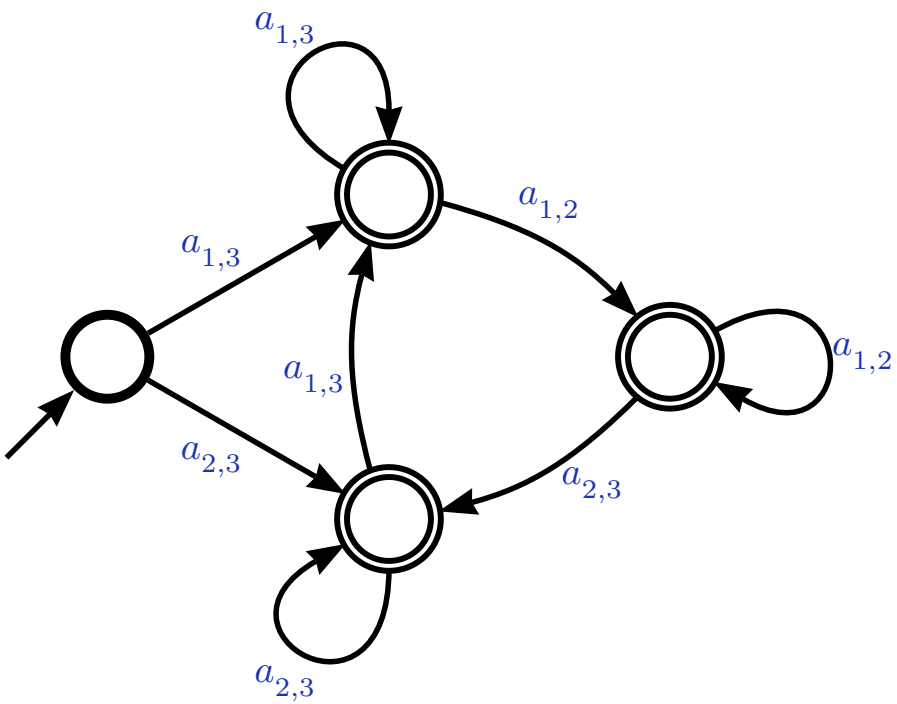
Automate pour 4 brins

- Condition 2 : Le mot w_k se termine par $a_{..,3}$ pour $k \geqslant 3$.



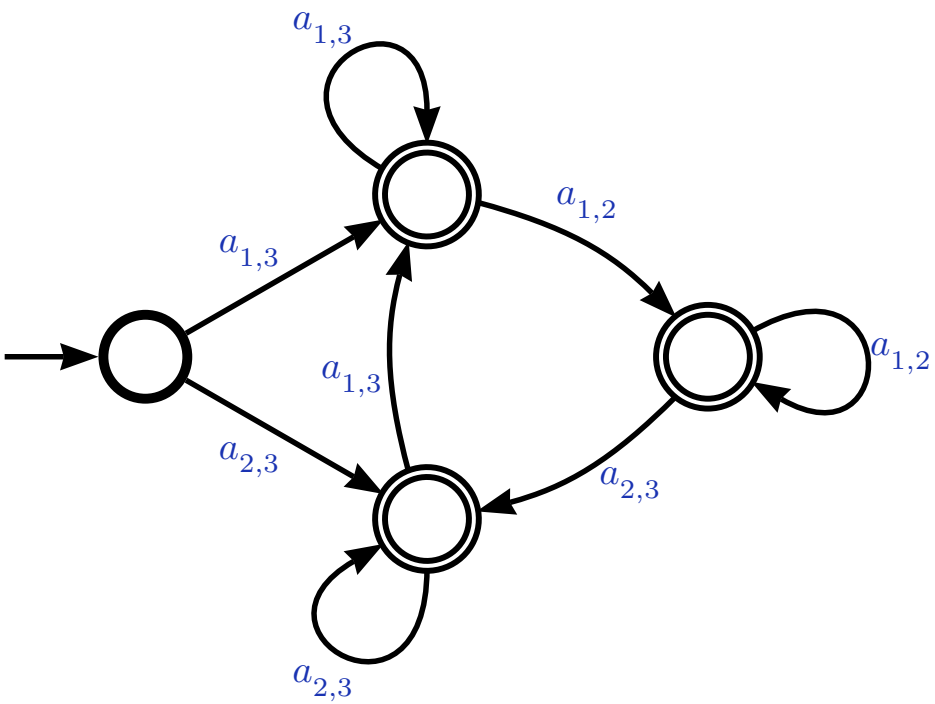
Automate pour 4 brins

- Condition 2 : Le mot w_k se termine par $a_{..,3}$ pour $k \geqslant 3$.



Automate pour 4 brins

- Condition 2 : Le mot w_k se termine par $a_{..,3}$ pour $k \geqslant 3$.



Automate pour 4 brins

- Condition 3 : Si, pour $k \geqslant 3$, le mot w_k se termine par $a_{1,3}$,
  alors le mot w_{k-1} contient une $a_{2,4}$-barrière.

Automate pour 4 brins

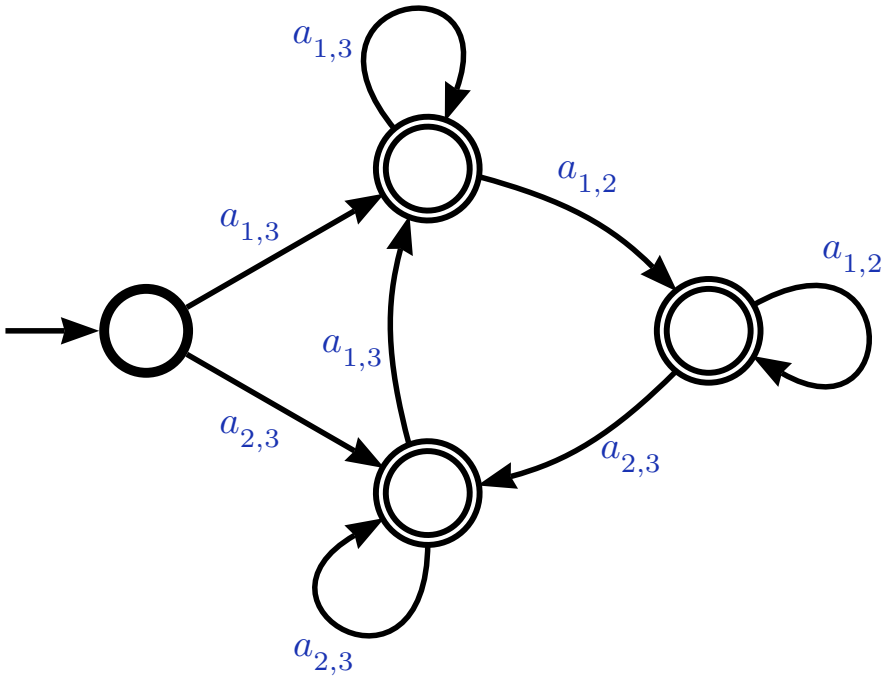
- Condition 3 : Si, pour $k \geqslant 3$, le mot w_k se termine par $a_{1,3}$,
  alors le mot w_{k-1} contient une $a_{2,4}$-barrière.

c'est-à-dire, une lettre $a_{1,3}$

Automate pour 4 brins

- Condition 3 : Si, pour $k \geqslant 3$, le mot w_k se termine par $a_{1,3}$, alors le mot w_{k-1} contient une $a_{2,4}$-barrière.

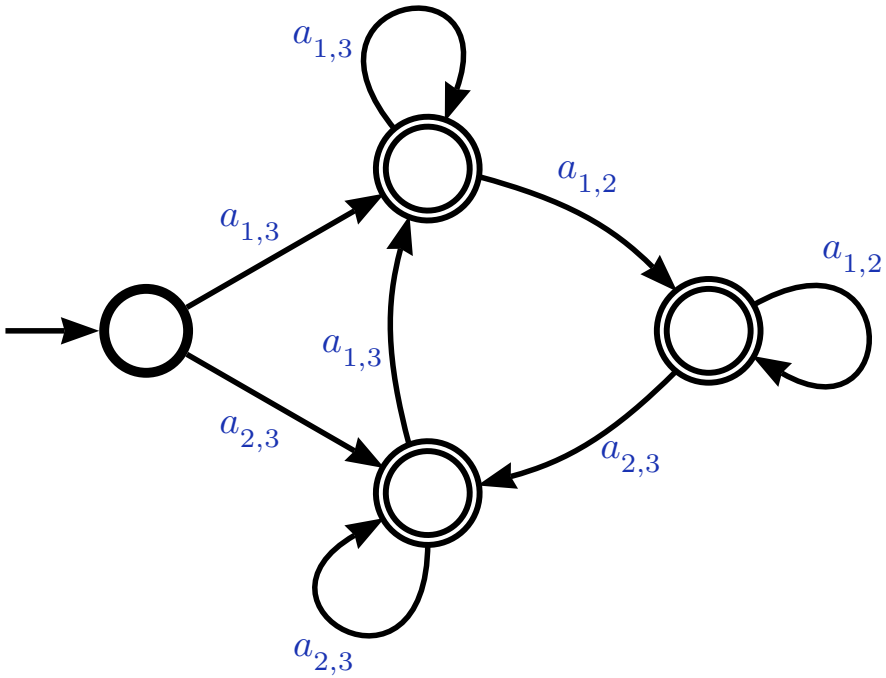
c'est-à-dire, une lettre $a_{1,3}$

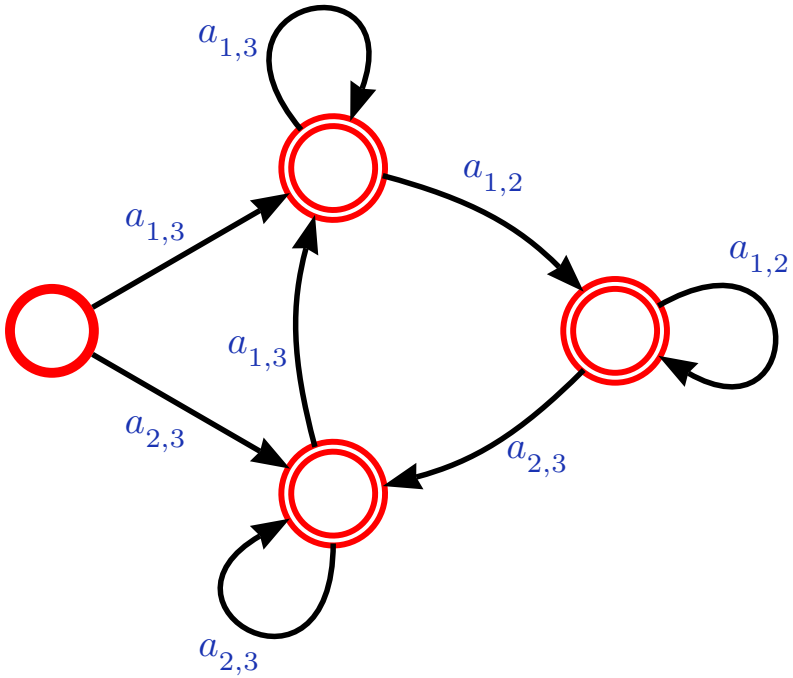


Automate pour 4 brins

- Condition 3 : Si, pour $k \geqslant 3$, le mot w_k se termine par $a_{1,3}$, alors le mot w_{k-1} contient une $a_{2,4}$-barrière.

c'est-à-dire, une lettre $a_{1,3}$

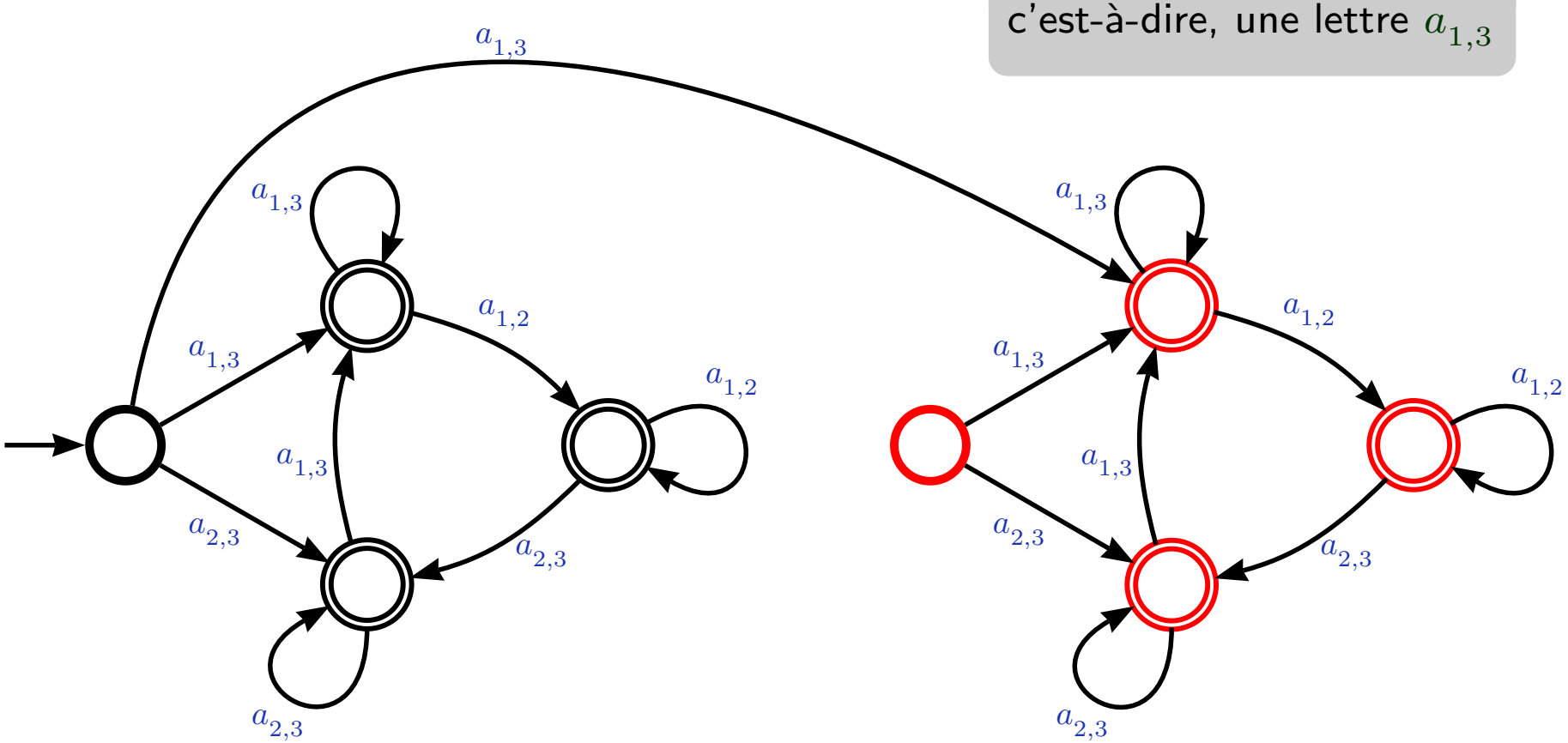




Automate pour 4 brins

- Condition 3 : Si, pour $k \geqslant 3$, le mot w_k se termine par $a_{1,3}$, alors le mot w_{k-1} contient une $a_{2,4}$-barrière.

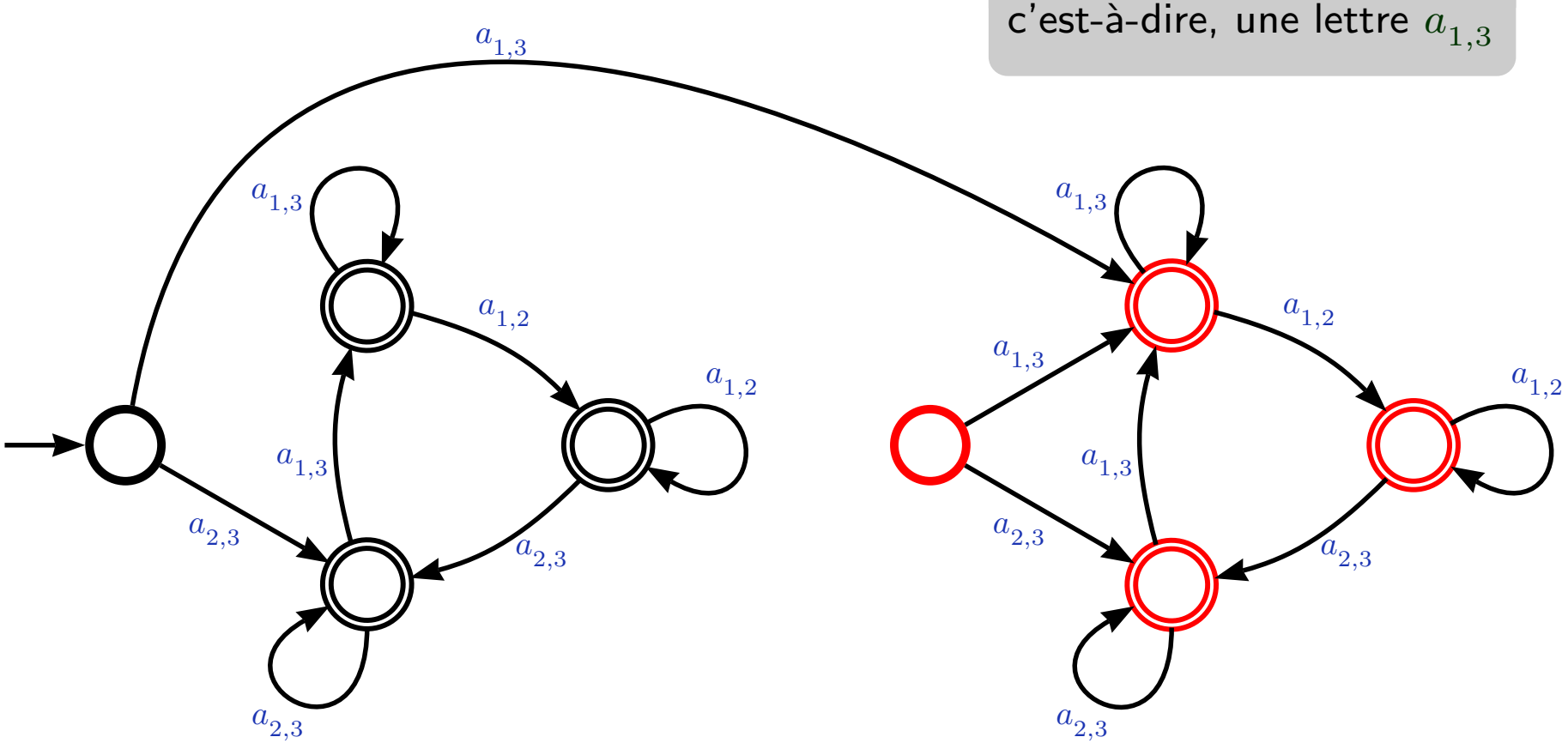
c'est-à-dire, une lettre $a_{1,3}$



Automate pour 4 brins

- Condition 3 : Si, pour $k \geqslant 3$, le mot w_k se termine par $a_{1,3}$, alors le mot w_{k-1} contient une $a_{2,4}$-barrière.

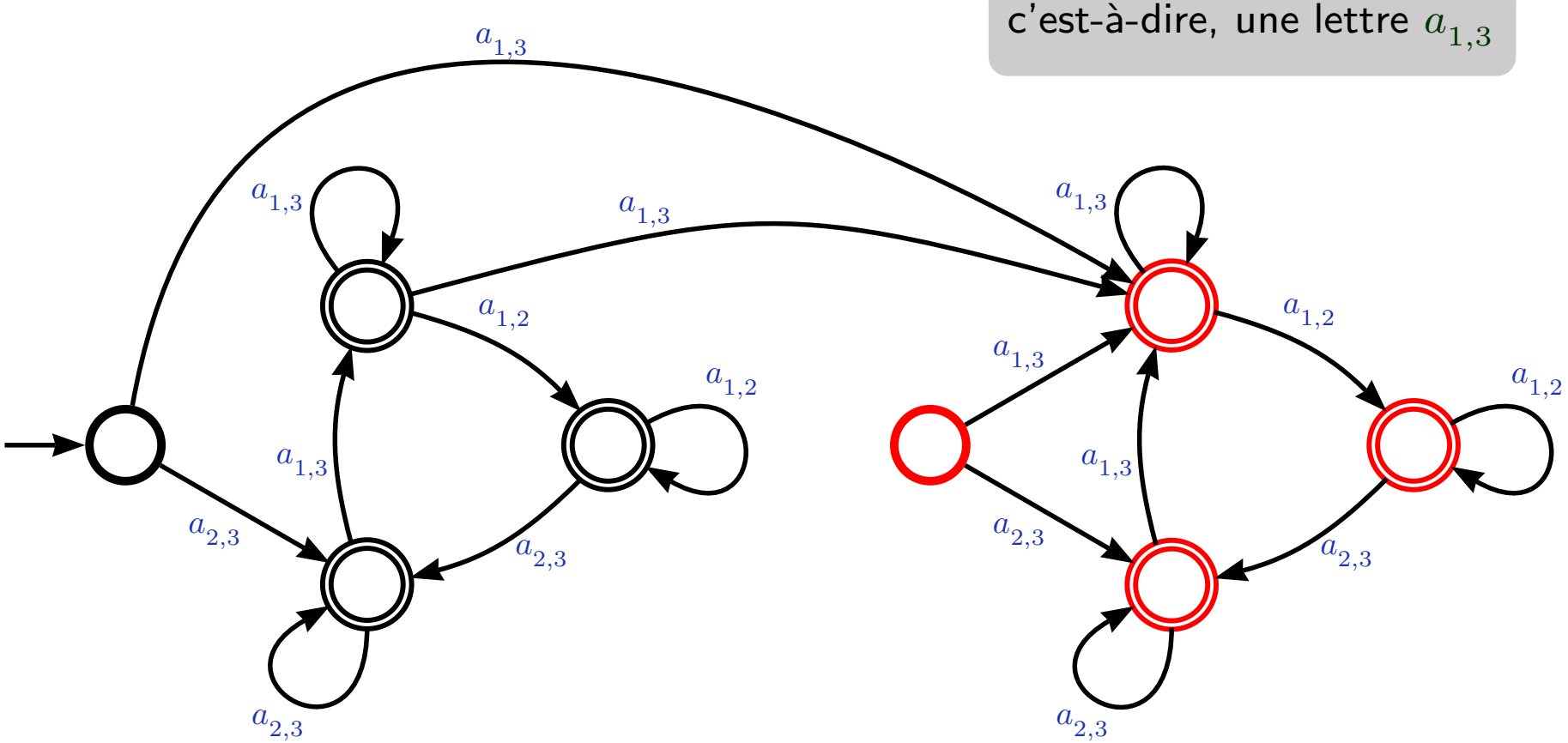
c'est-à-dire, une lettre $a_{1,3}$



Automate pour 4 brins

- Condition 3 : Si, pour $k \geqslant 3$, le mot w_k se termine par $a_{1,3}$, alors le mot w_{k-1} contient une $a_{2,4}$-barrière.

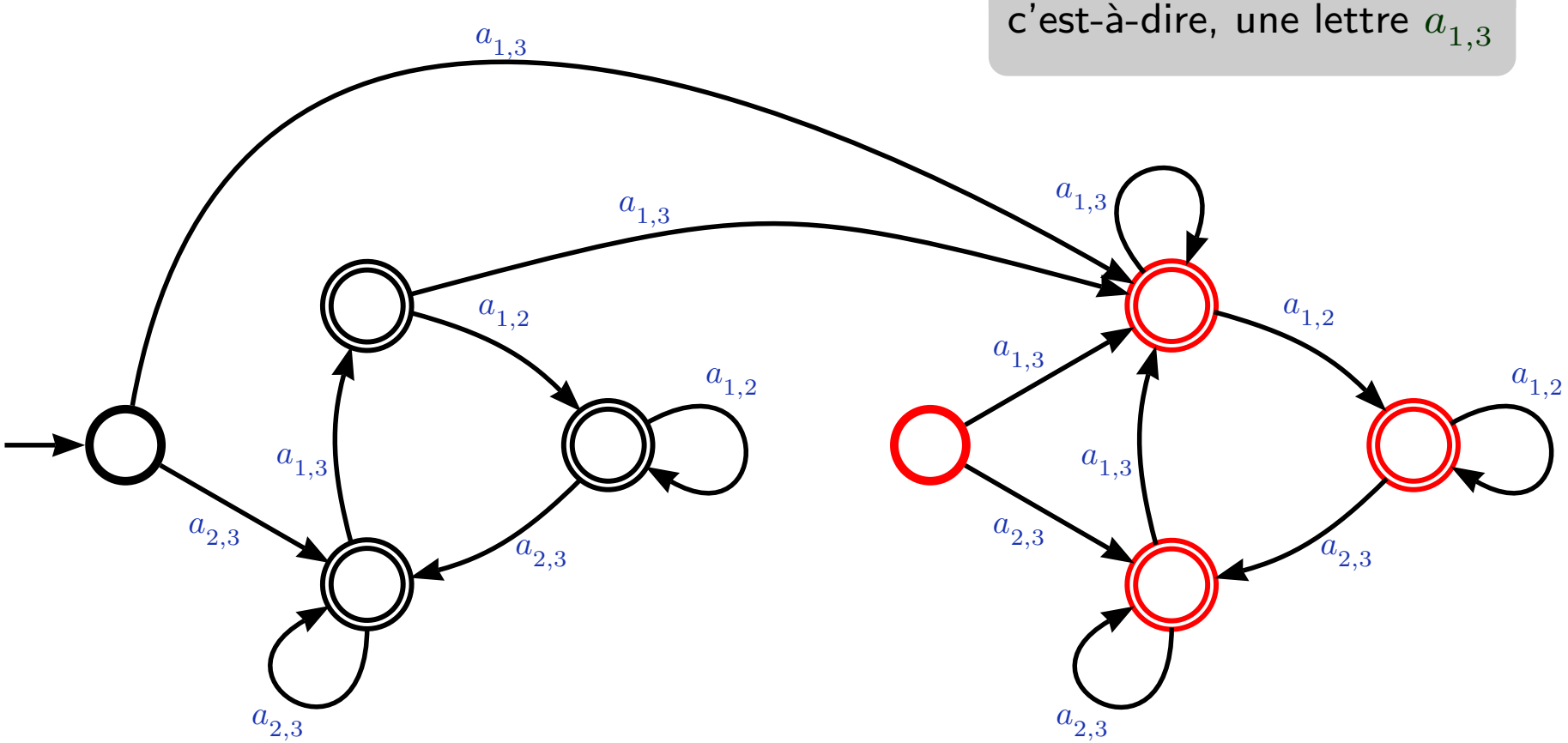
c'est-à-dire, une lettre $a_{1,3}$



Automate pour 4 brins

- Condition 3 : Si, pour $k \geqslant 3$, le mot w_k se termine par $a_{1,3}$, alors le mot w_{k-1} contient une $a_{2,4}$-barrière.

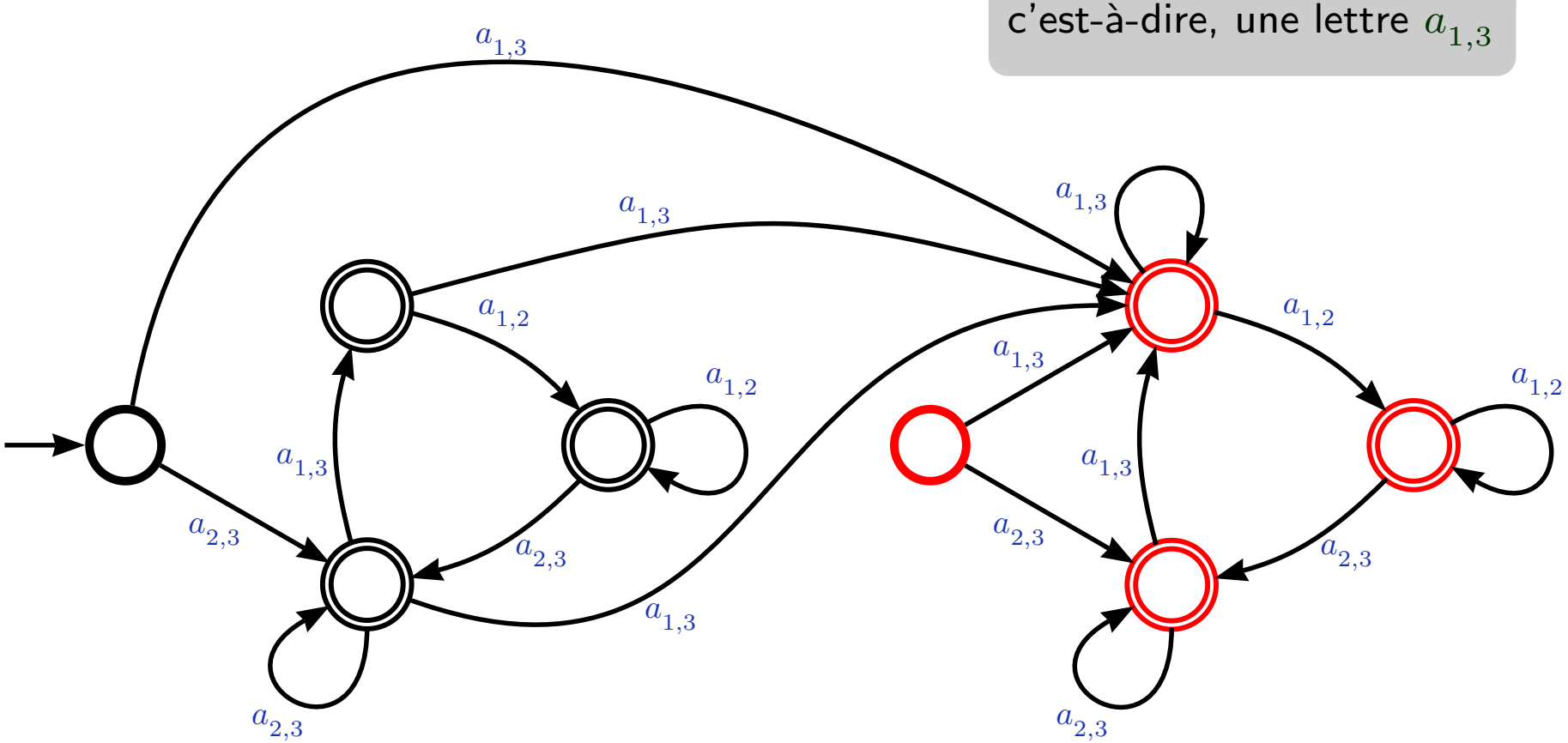
c'est-à-dire, une lettre $a_{1,3}$



Automate pour 4 brins

- Condition 3 : Si, pour $k \geqslant 3$, le mot w_k se termine par $a_{1,3}$, alors le mot w_{k-1} contient une $a_{2,4}$-barrière.

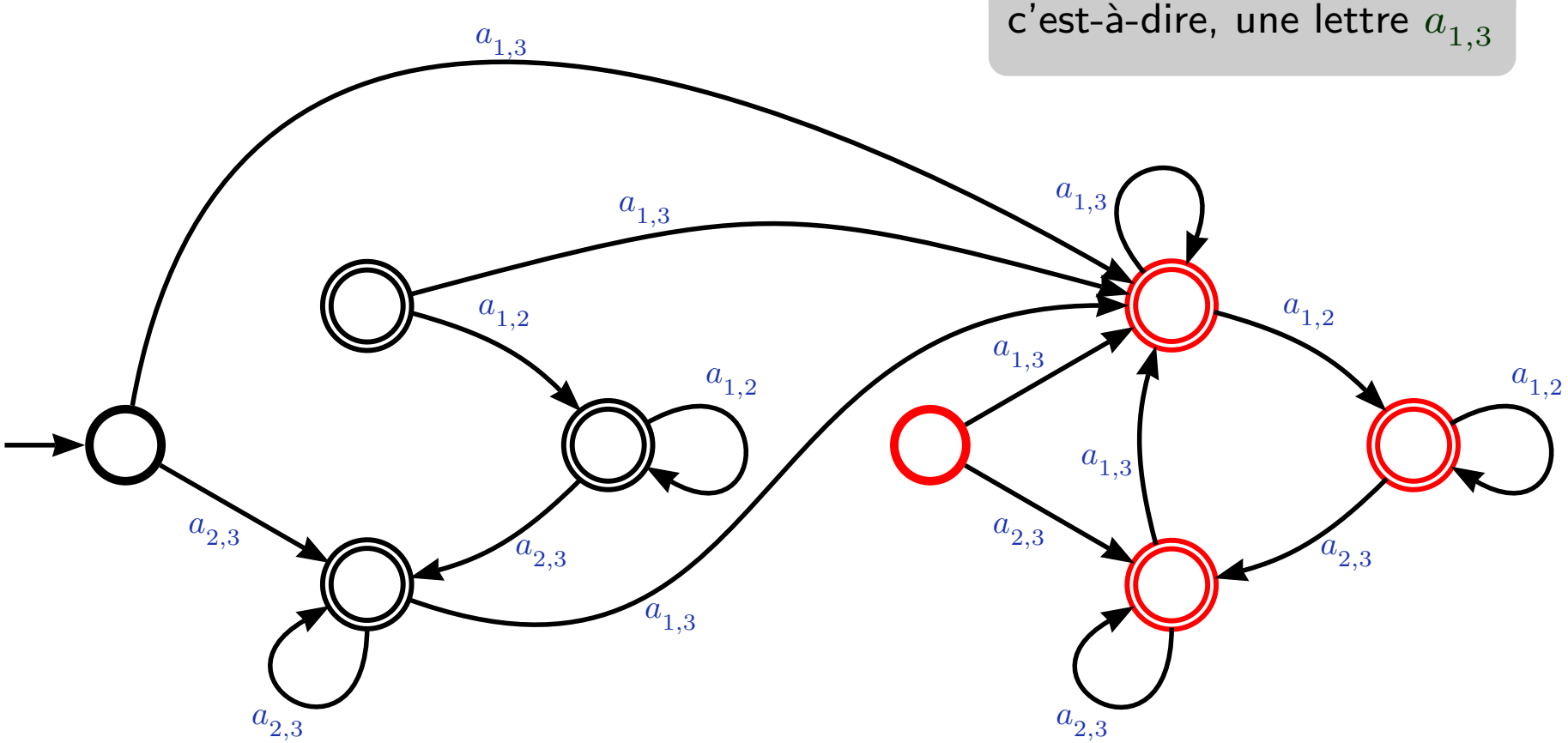
c'est-à-dire, une lettre $a_{1,3}$



Automate pour 4 brins

- Condition 3 : Si, pour $k \geqslant 3$, le mot w_k se termine par $a_{1,3}$, alors le mot w_{k-1} contient une $a_{2,4}$-barrière.

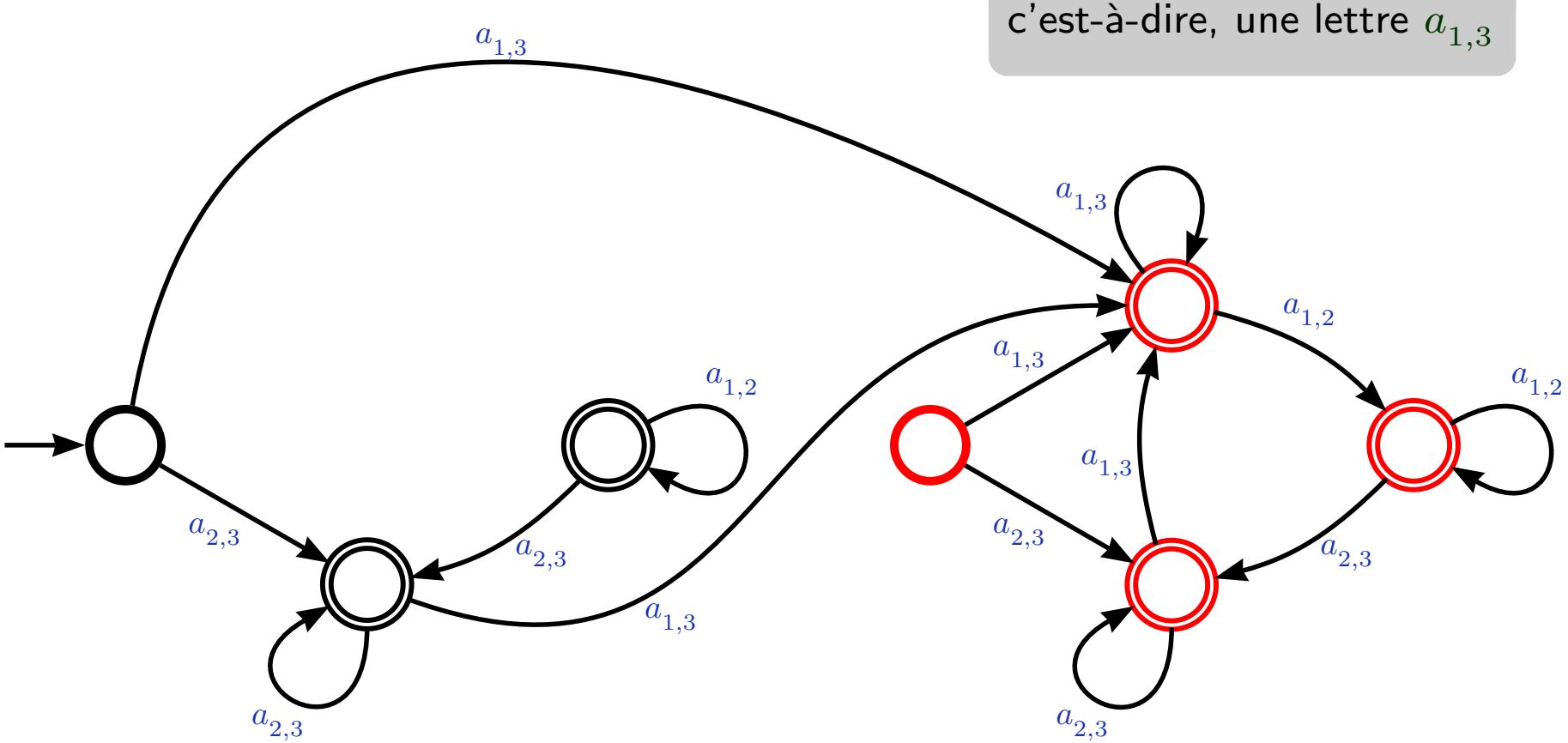
c'est-à-dire, une lettre $a_{1,3}$



Automate pour 4 brins

- Condition 3 : Si, pour $k \geqslant 3$, le mot w_k se termine par $a_{1,3}$, alors le mot w_{k-1} contient une $a_{2,4}$-barrière.

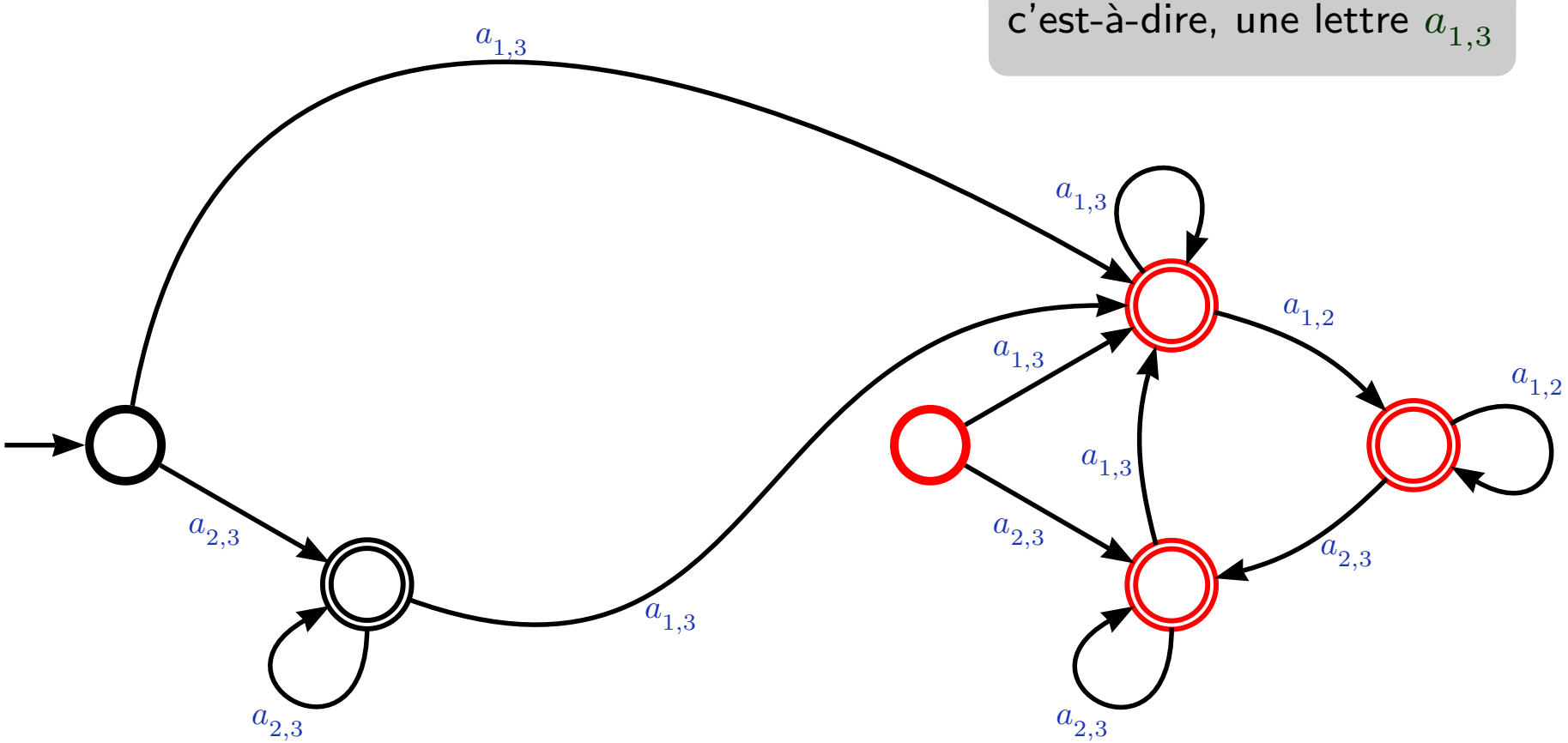
c'est-à-dire, une lettre $a_{1,3}$



Automate pour 4 brins

- Condition 3 : Si, pour $k \geqslant 3$, le mot w_k se termine par $a_{1,3}$, alors le mot w_{k-1} contient une $a_{2,4}$-barrière.

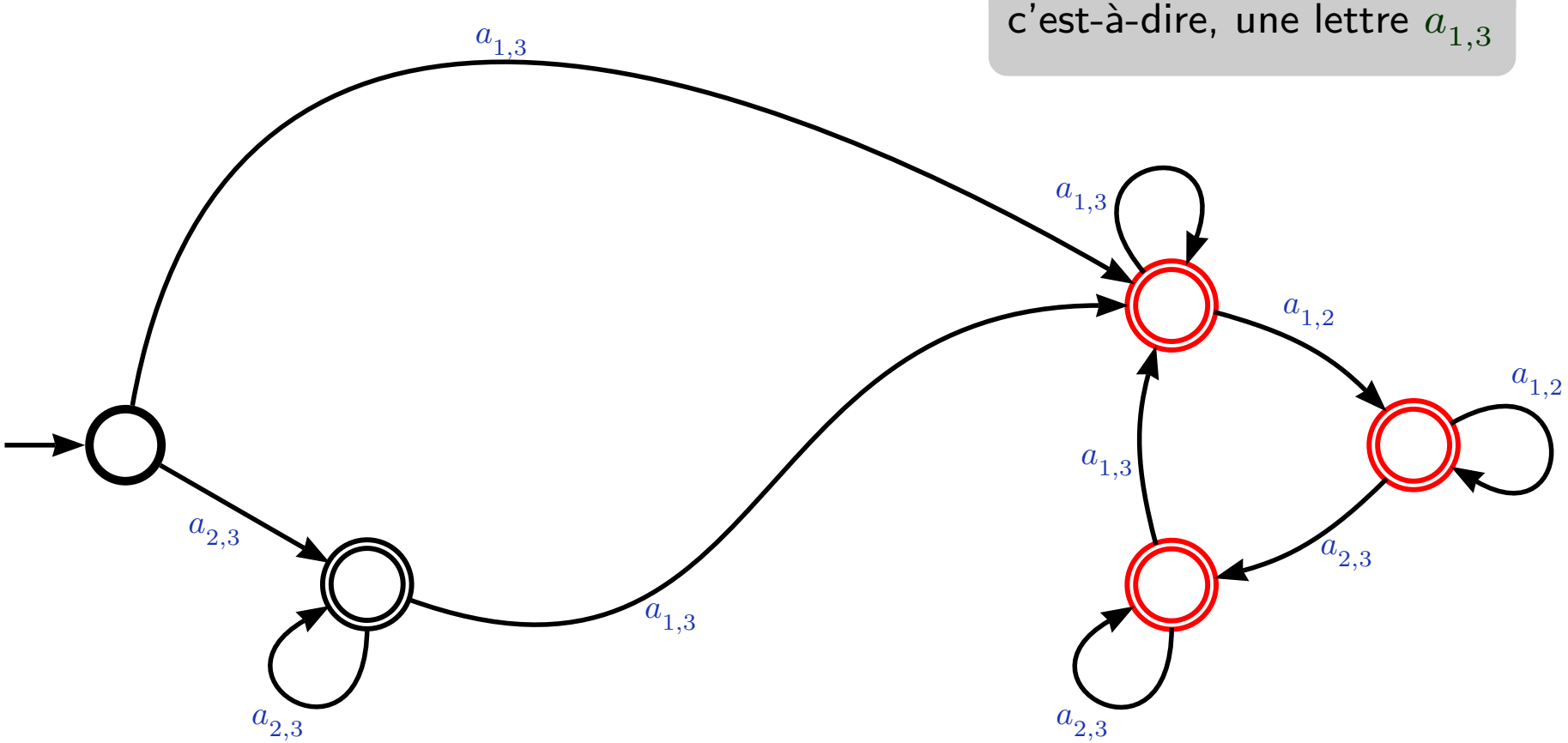
c'est-à-dire, une lettre $a_{1,3}$



Automate pour 4 brins

- Condition 3 : Si, pour $k \geqslant 3$, le mot w_k se termine par $a_{1,3}$, alors le mot w_{k-1} contient une $a_{2,4}$-barrière.

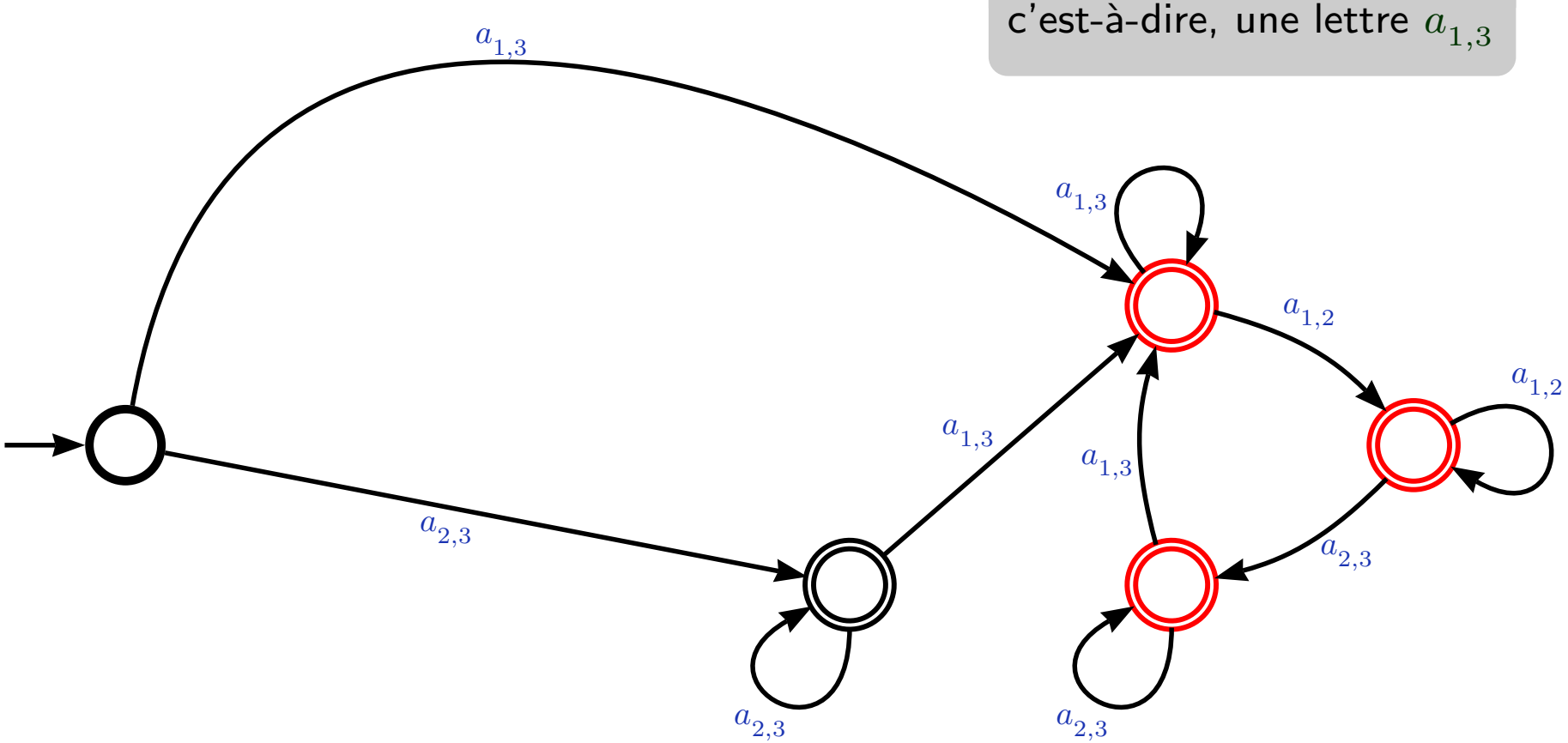
c'est-à-dire, une lettre $a_{1,3}$



Automate pour 4 brins

- Condition 3 : Si, pour $k \geqslant 3$, le mot w_k se termine par $a_{1,3}$, alors le mot w_{k-1} contient une $a_{2,4}$-barrière.

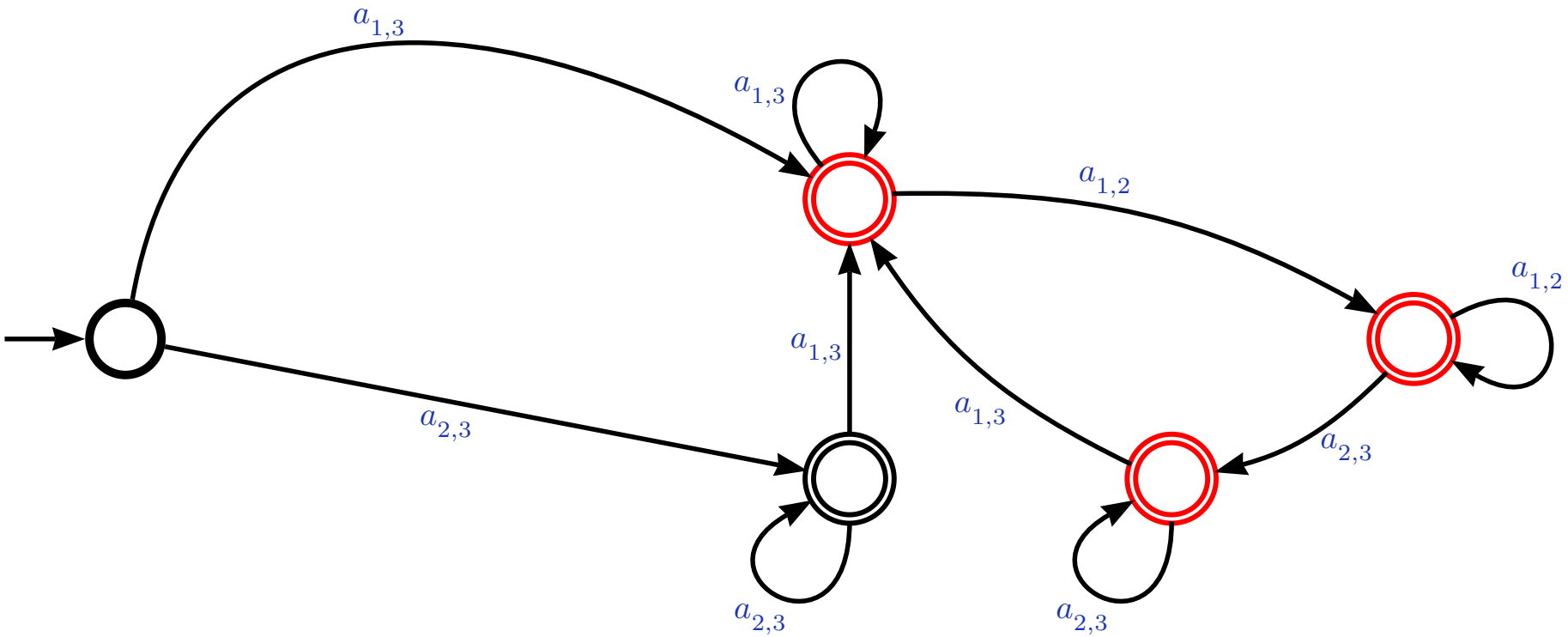
c'est-à-dire, une lettre $a_{1,3}$



Automate pour 4 brins

- Condition 3 : Si, pour $k \geqslant 3$, le mot w_k se termine par $a_{1,3}$, alors le mot w_{k-1} contient une $a_{2,4}$-barrière.

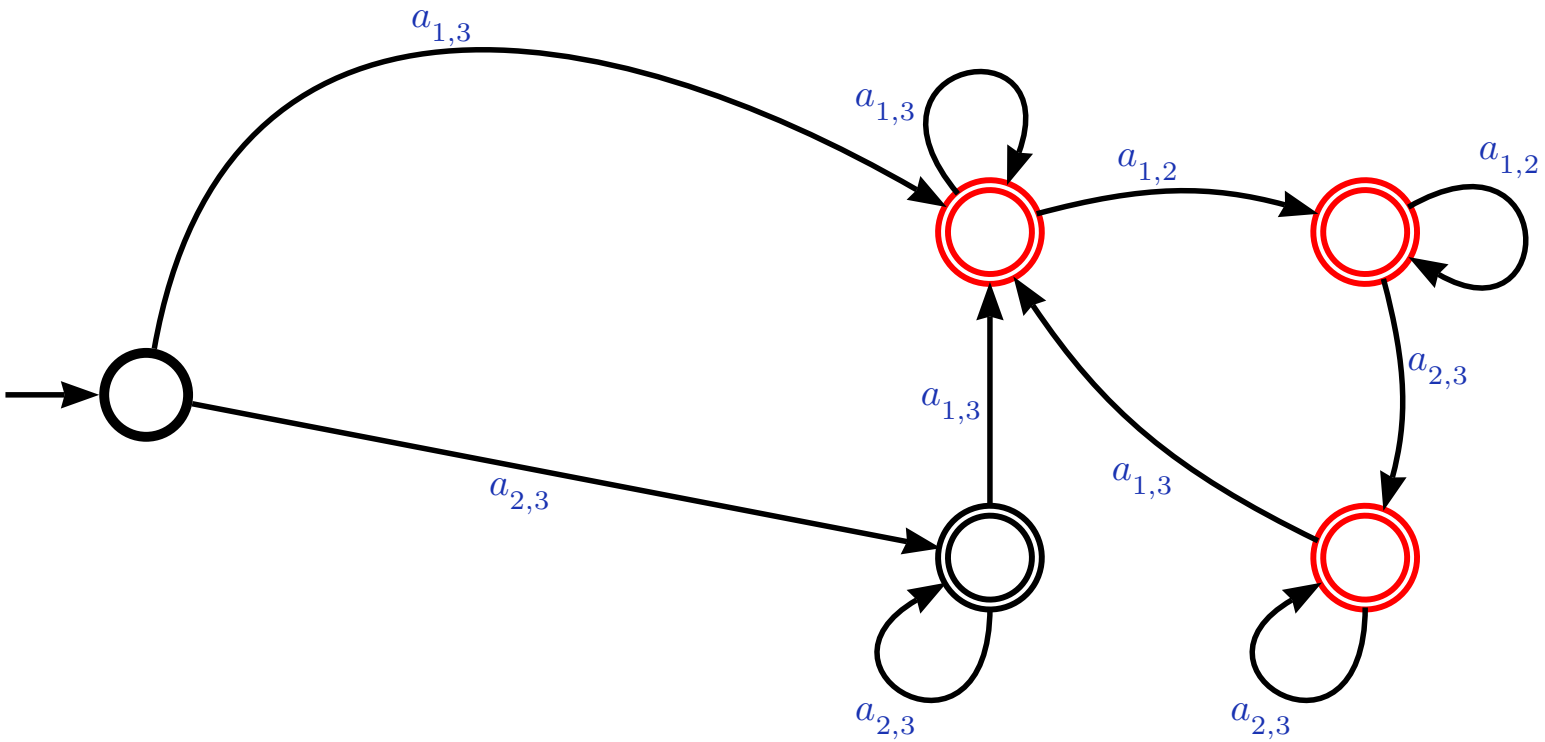
c'est-à-dire, une lettre $a_{1,3}$



Automate pour 4 brins

- Condition 3 : Si, pour $k \geqslant 3$, le mot w_k se termine par $a_{1,3}$, alors le mot w_{k-1} contient une $a_{2,4}$-barrière.

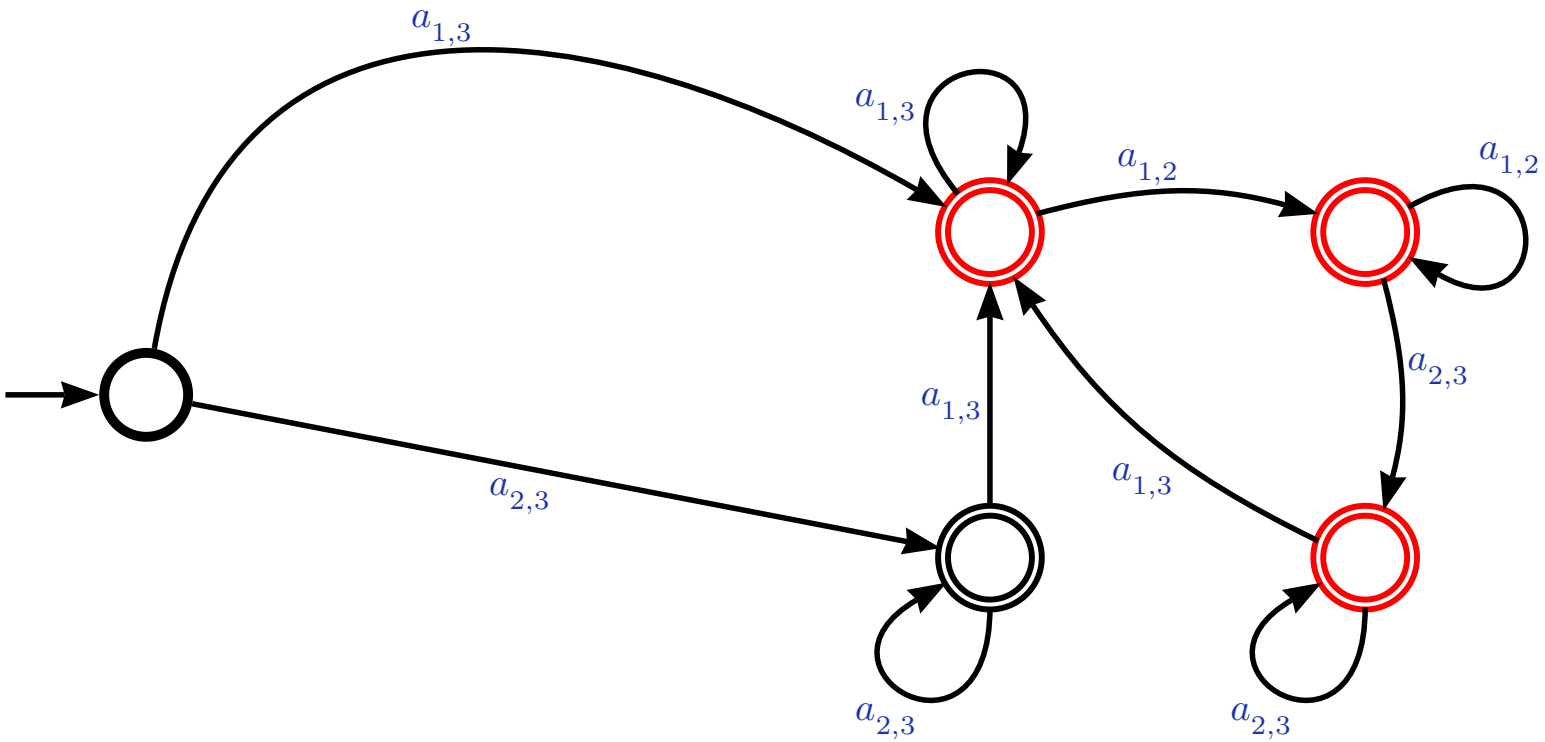
c'est-à-dire, une lettre $a_{1,3}$



Automate pour 4 brins

- Condition 3 : Si, pour $k \geqslant 3$, le mot w_k se termine par $a_{1,3}$, alors le mot w_{k-1} contient une $a_{2,4}$-barrière.

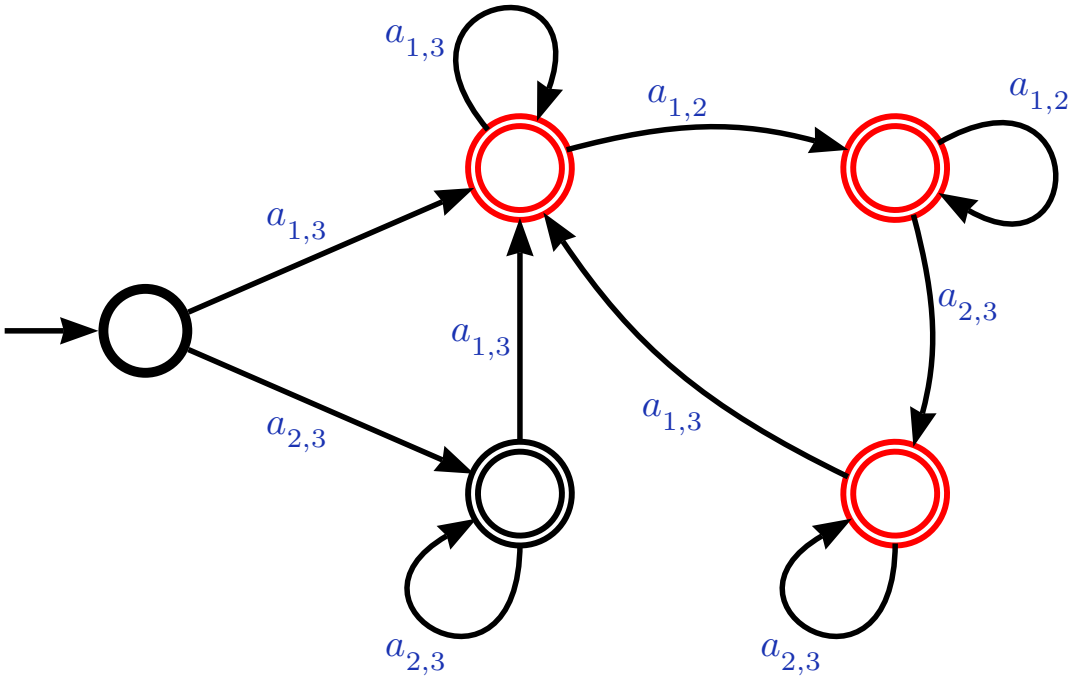
c'est-à-dire, une lettre $a_{1,3}$



Automate pour 4 brins

- Condition 3 : Si, pour $k \geqslant 3$, le mot w_k se termine par $a_{1,3}$, alors le mot w_{k-1} contient une $a_{2,4}$-barrière.

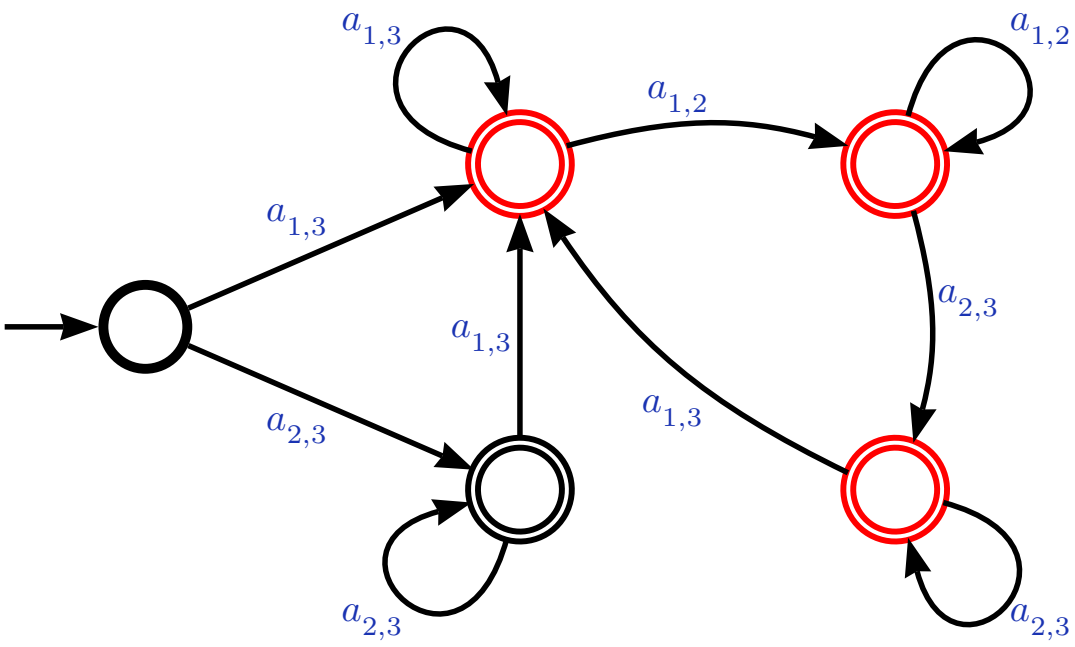
c'est-à-dire, une lettre $a_{1,3}$



Automate pour 4 brins

- Condition 3 : Si, pour $k \geqslant 3$, le mot w_k se termine par $a_{1,3}$, alors le mot w_{k-1} contient une $a_{2,4}$-barrière.

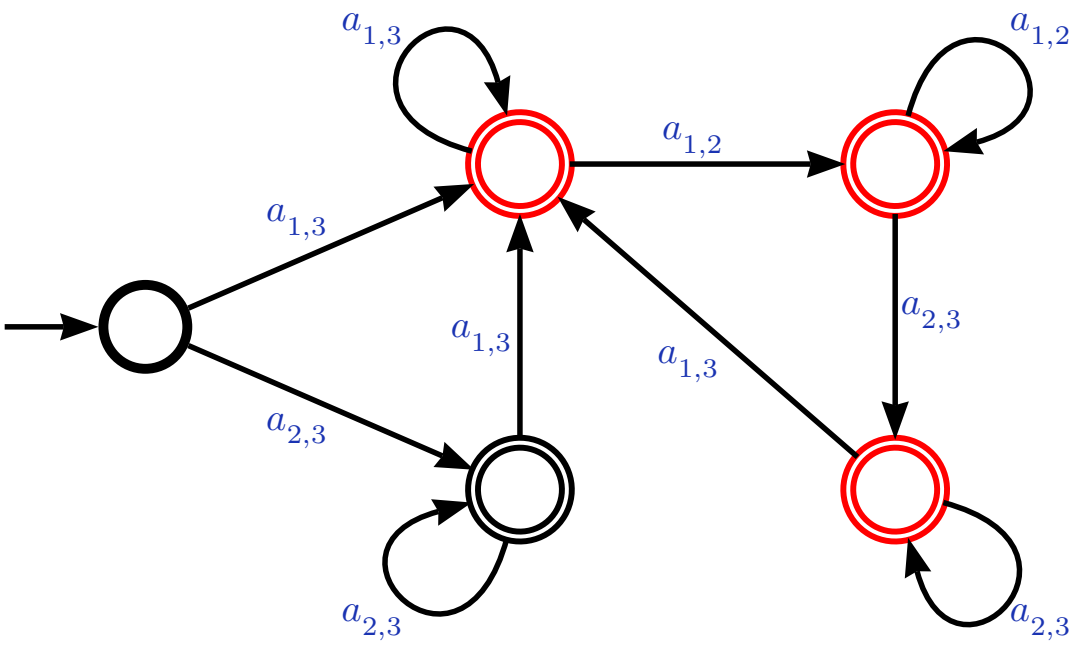
c'est-à-dire, une lettre $a_{1,3}$



Automate pour 4 brins

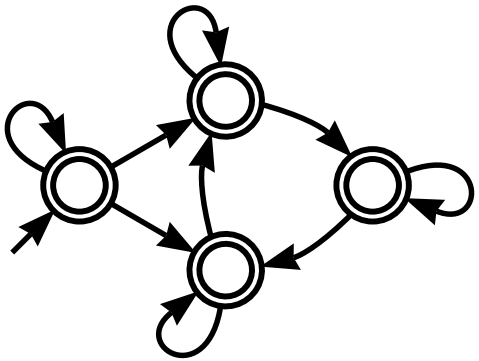
- Condition 3 : Si, pour $k \geqslant 3$, le mot w_k se termine par $a_{1,3}$, alors le mot w_{k-1} contient une $a_{2,4}$-barrière.

c'est-à-dire, une lettre $a_{1,3}$

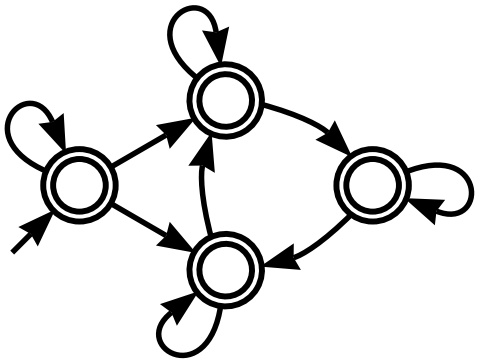


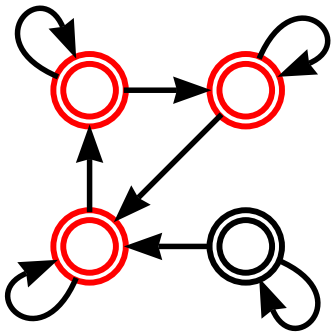
Automate pour 4 brins

Automate pour 4 brins

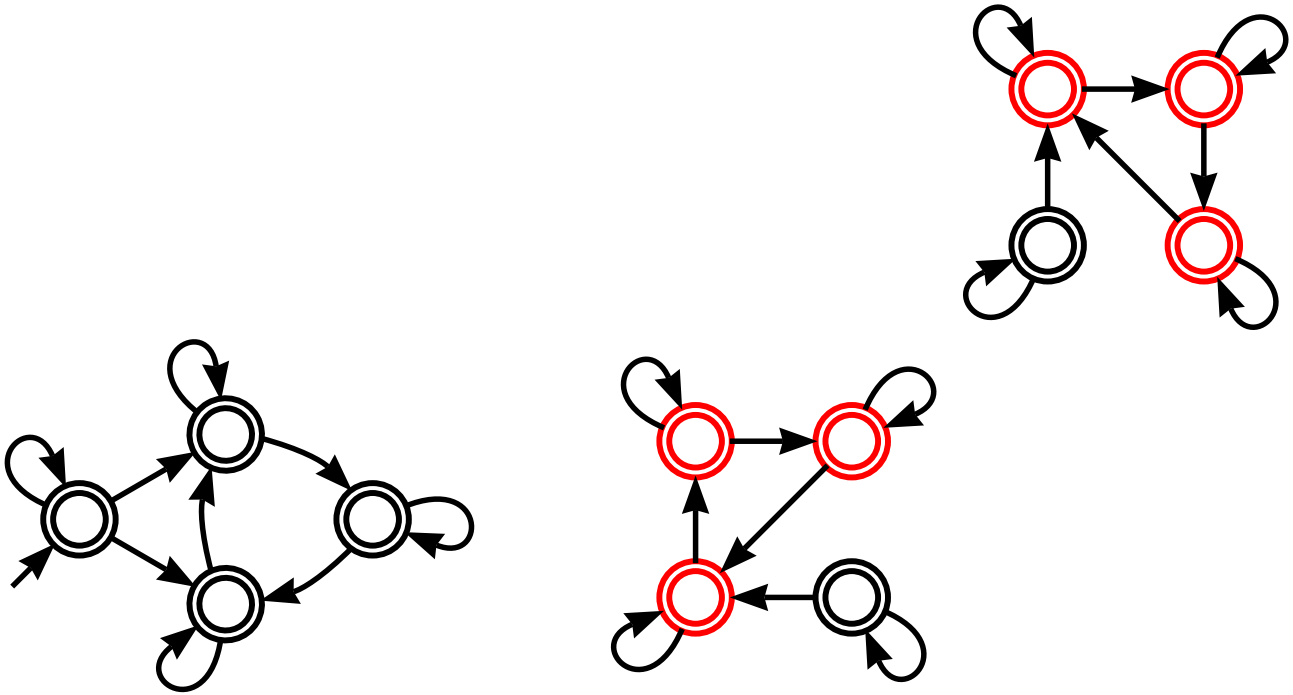


Automate pour 4 brins

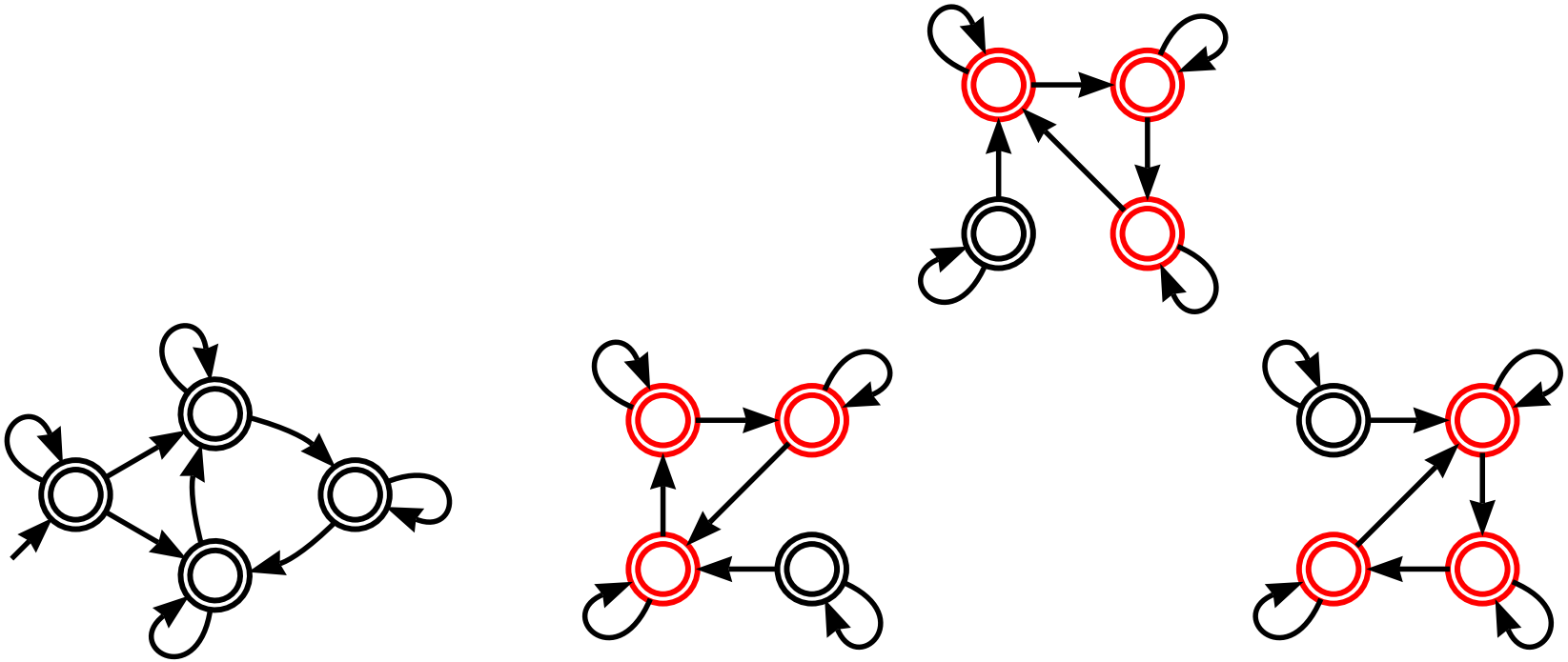




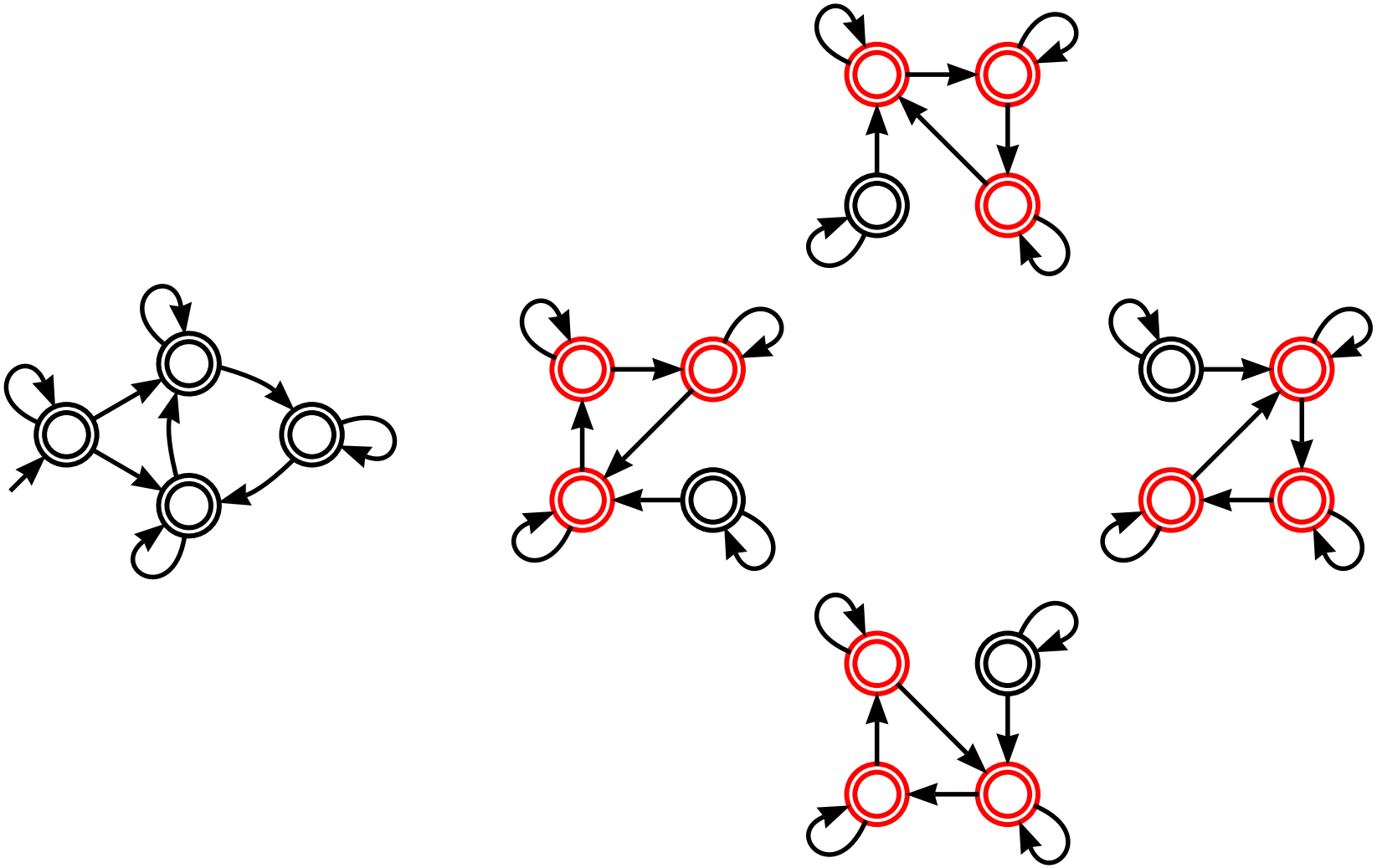
Automate pour 4 brins



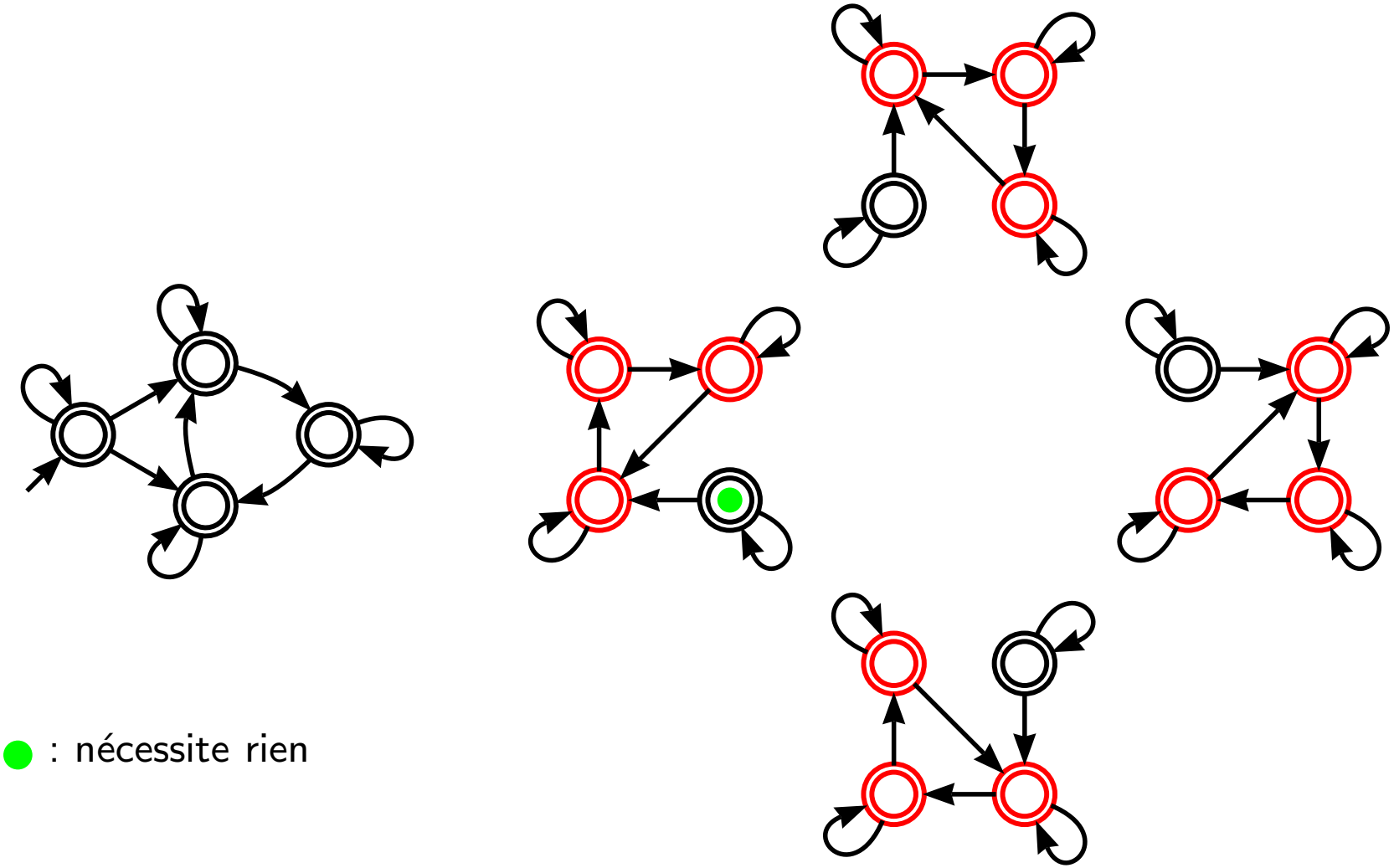
Automate pour 4 brins



Automate pour 4 brins

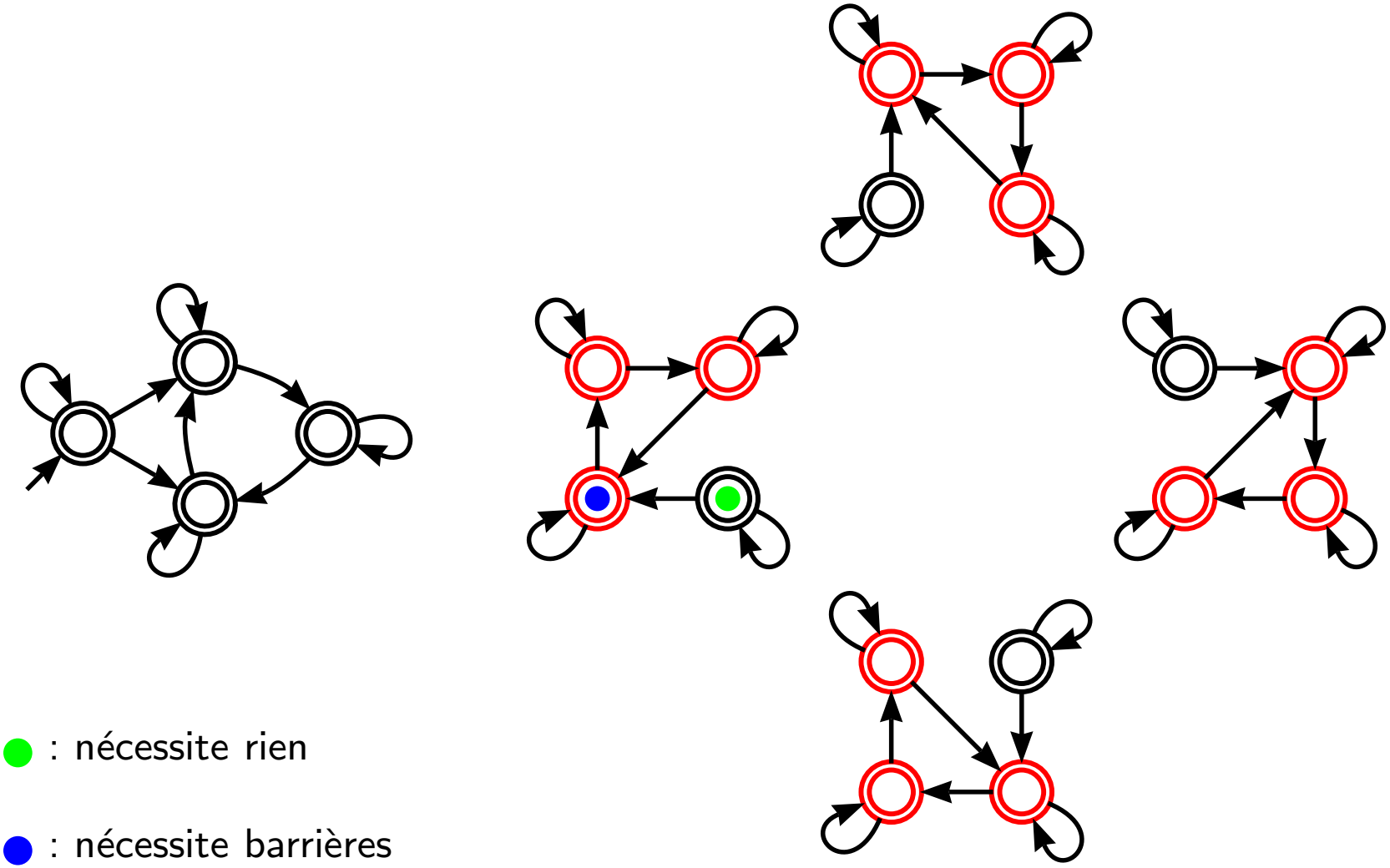


Automate pour 4 brins



● : nécessite rien

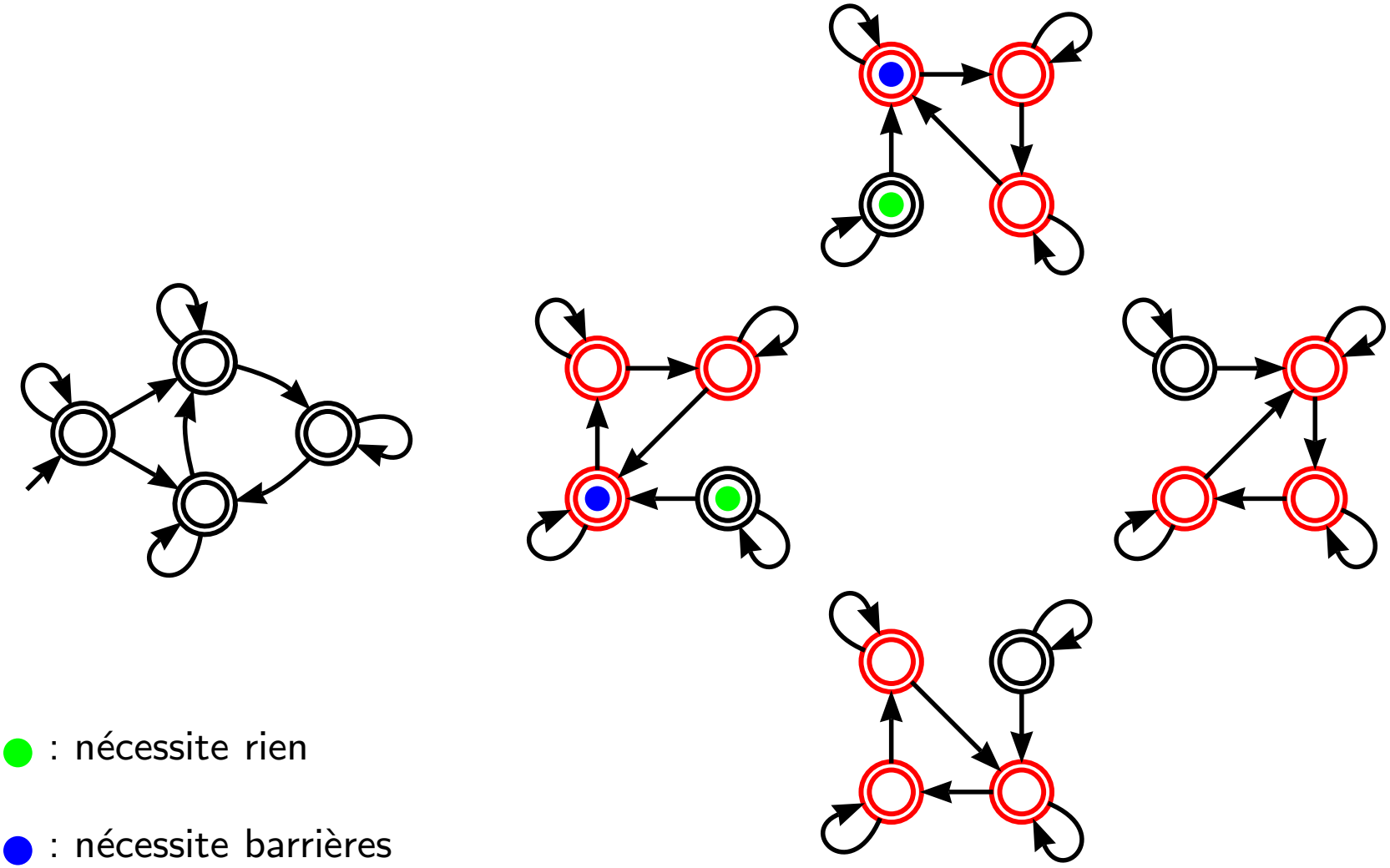
Automate pour 4 brins



● : nécessite rien

● : nécessite barrières

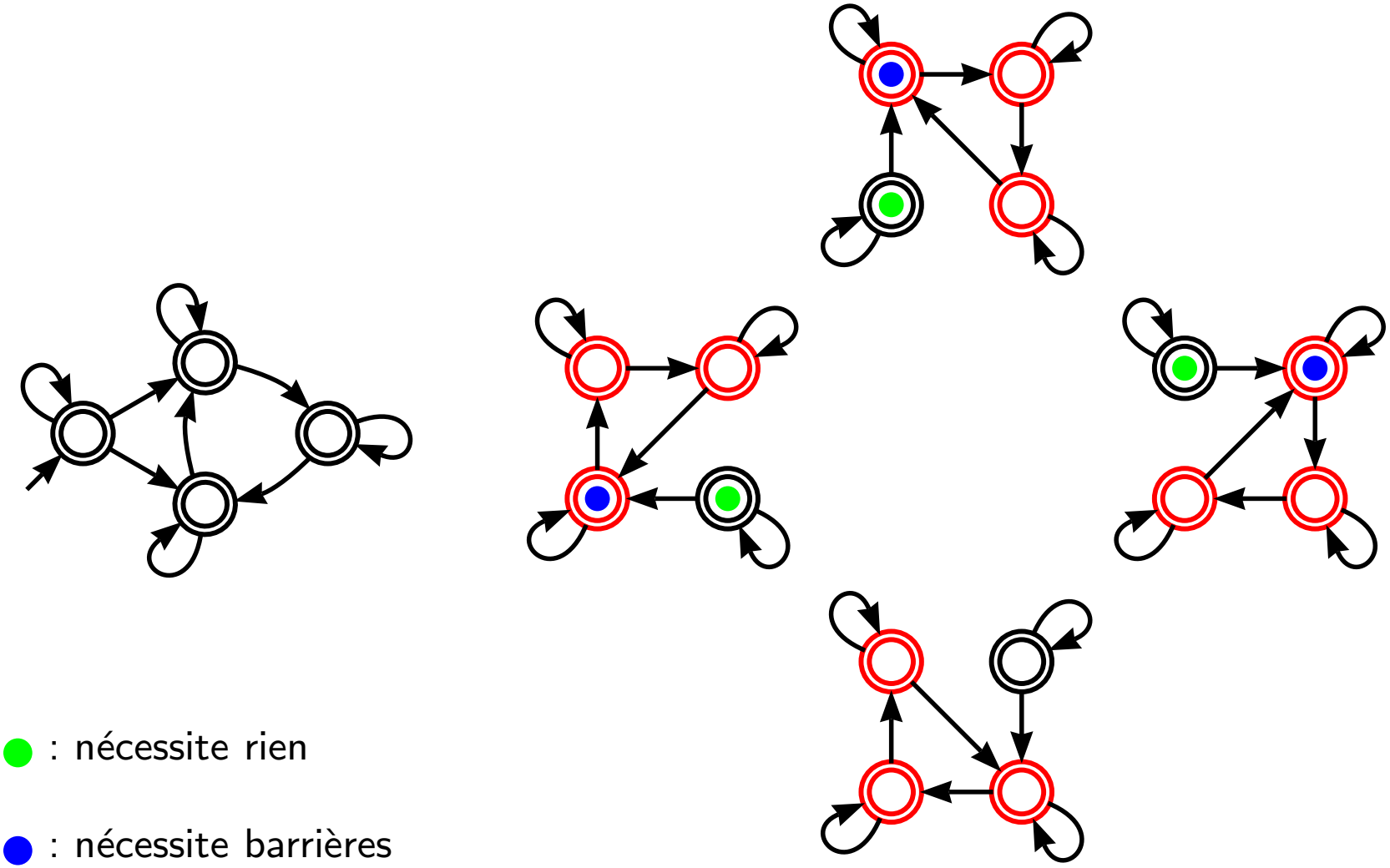
Automate pour 4 brins



● : nécessite rien

● : nécessite barrières

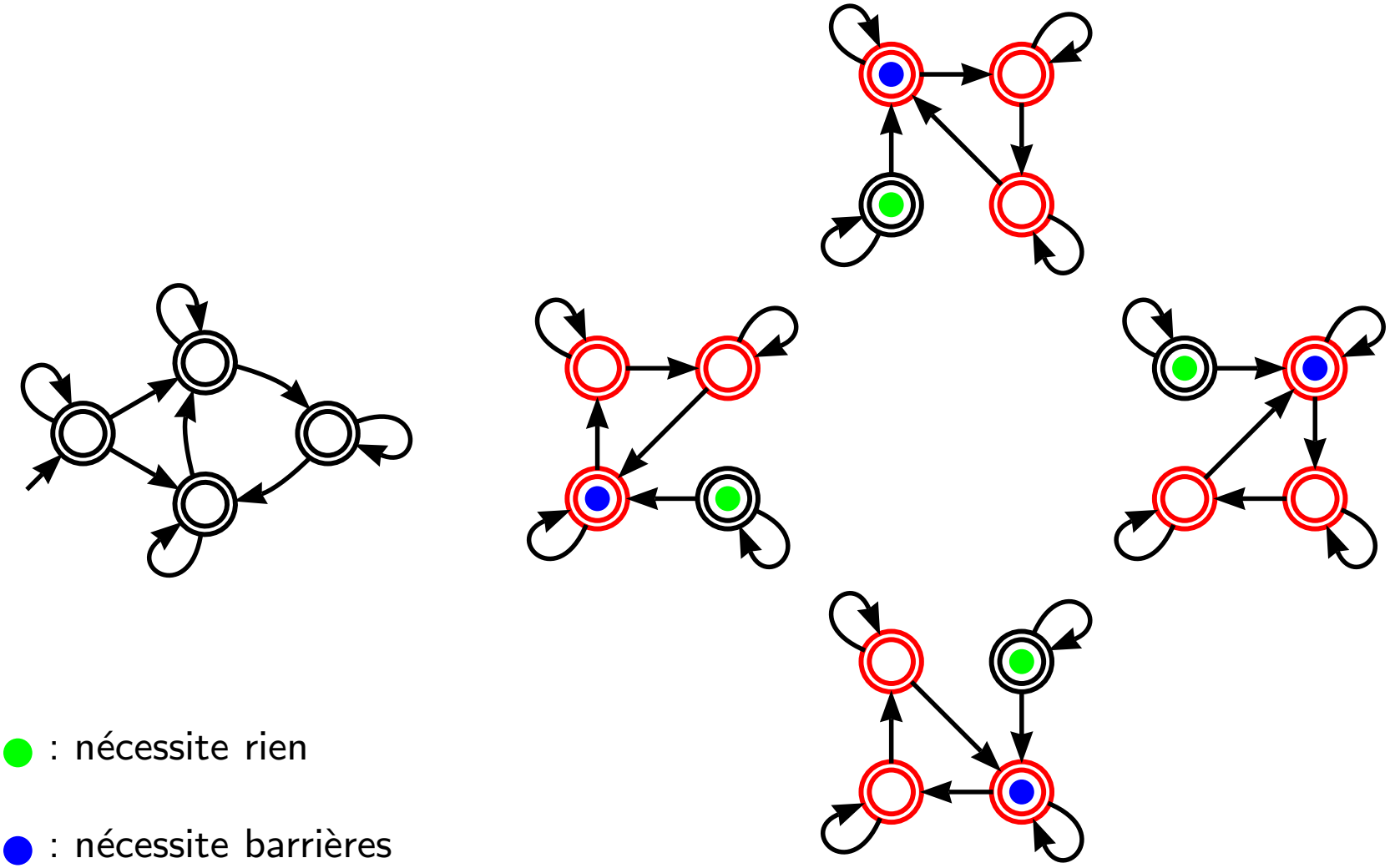
Automate pour 4 brins



● : nécessite rien

● : nécessite barrières

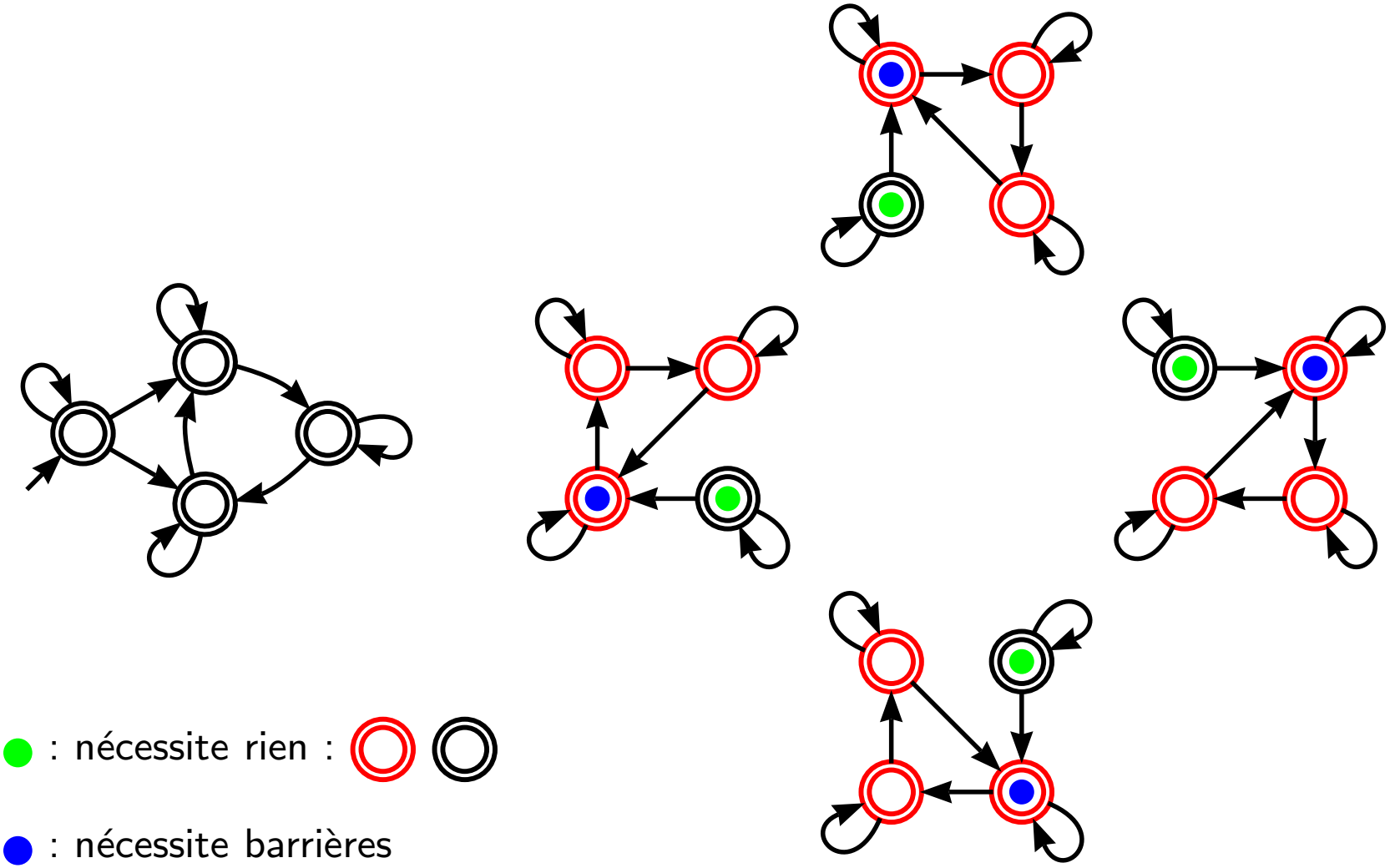
Automate pour 4 brins



● : nécessite rien

● : nécessite barrières

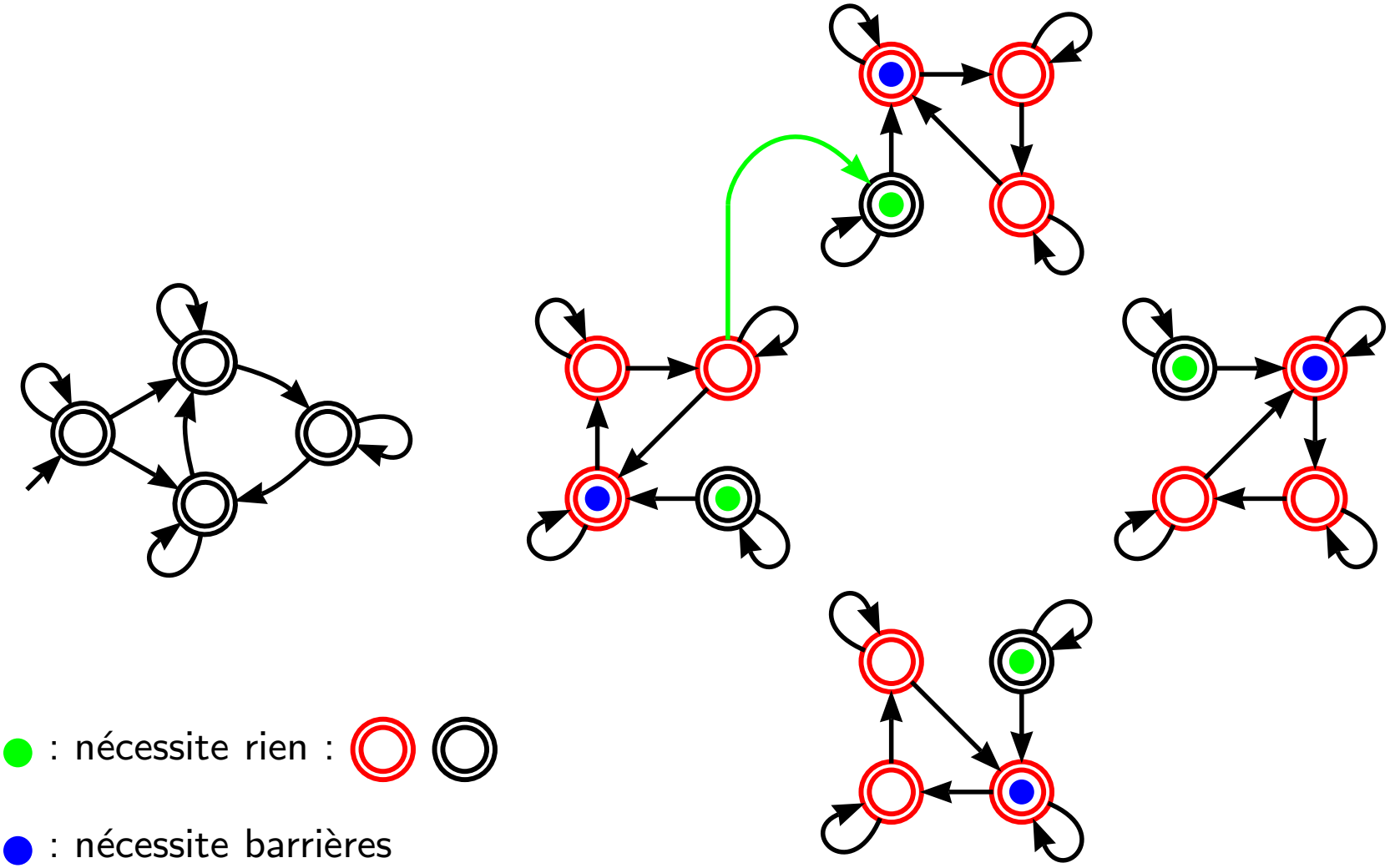
Automate pour 4 brins



● : nécessite rien : ◎ ◎

● : nécessite barrières

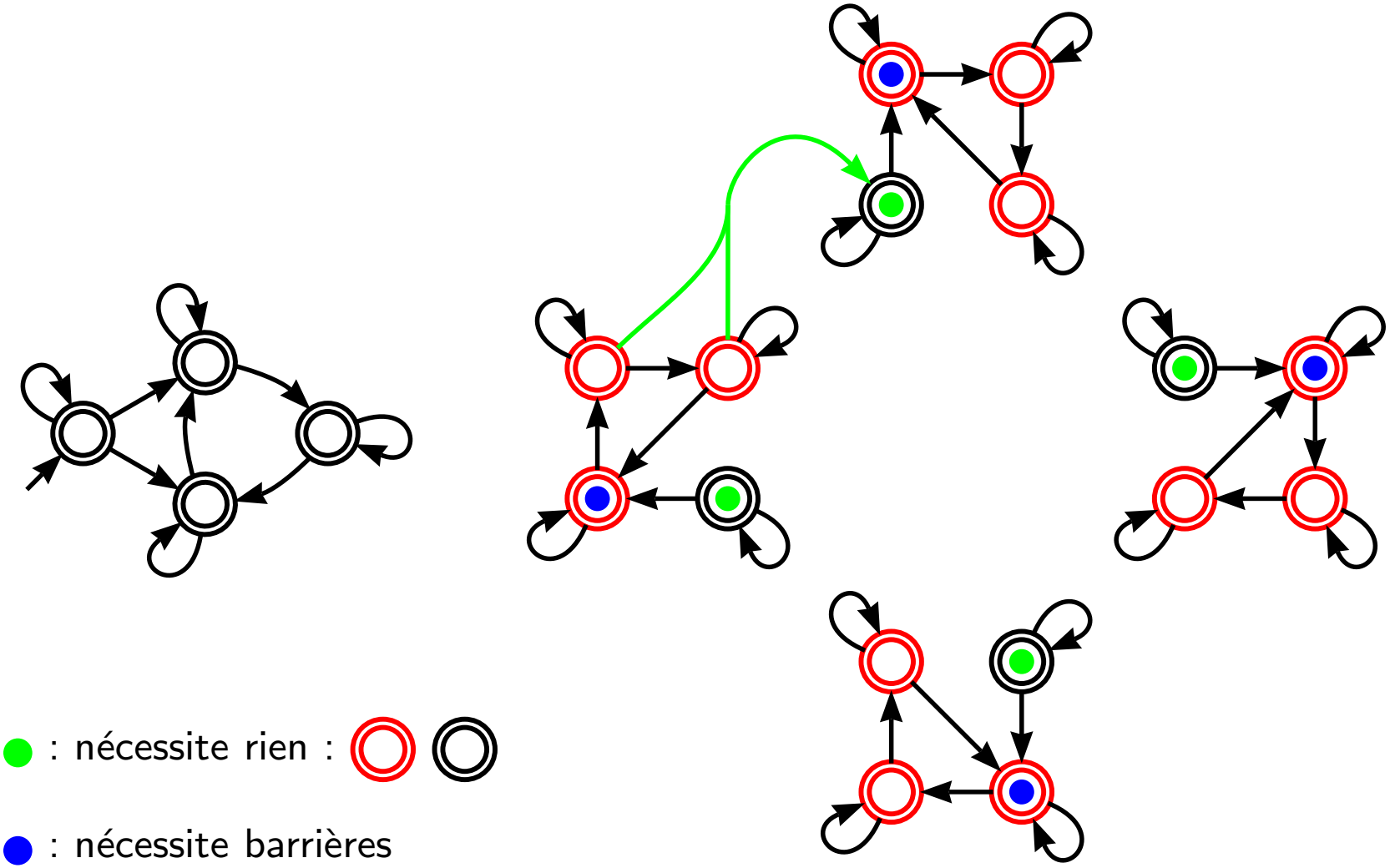
Automate pour 4 brins



● : nécessite rien : ◎ ◎

● : nécessite barrières

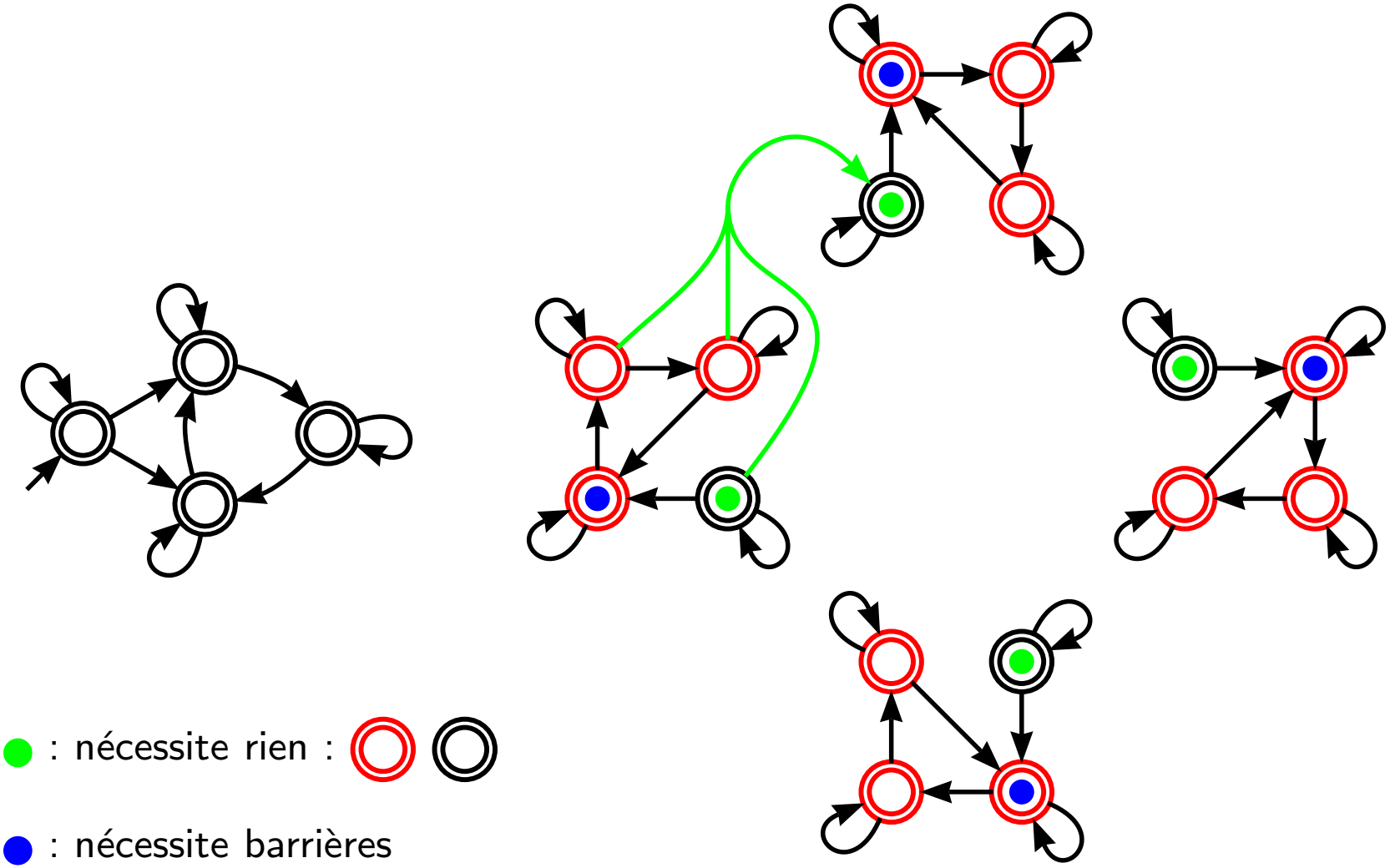
Automate pour 4 brins



● : nécessite rien : ◎ ◎

● : nécessite barrières

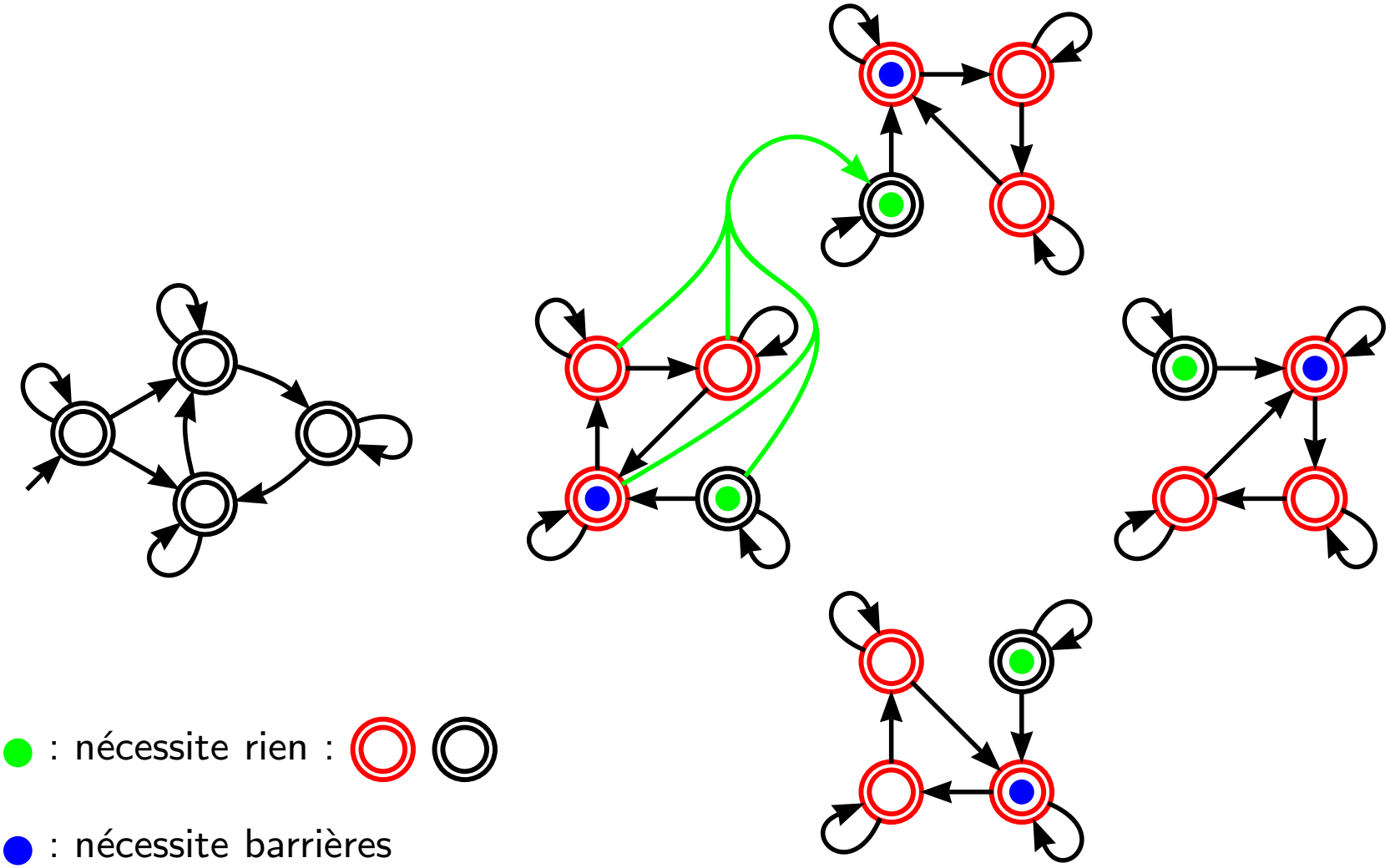
Automate pour 4 brins



● : nécessite rien : ◎ ◎

● : nécessite barrières

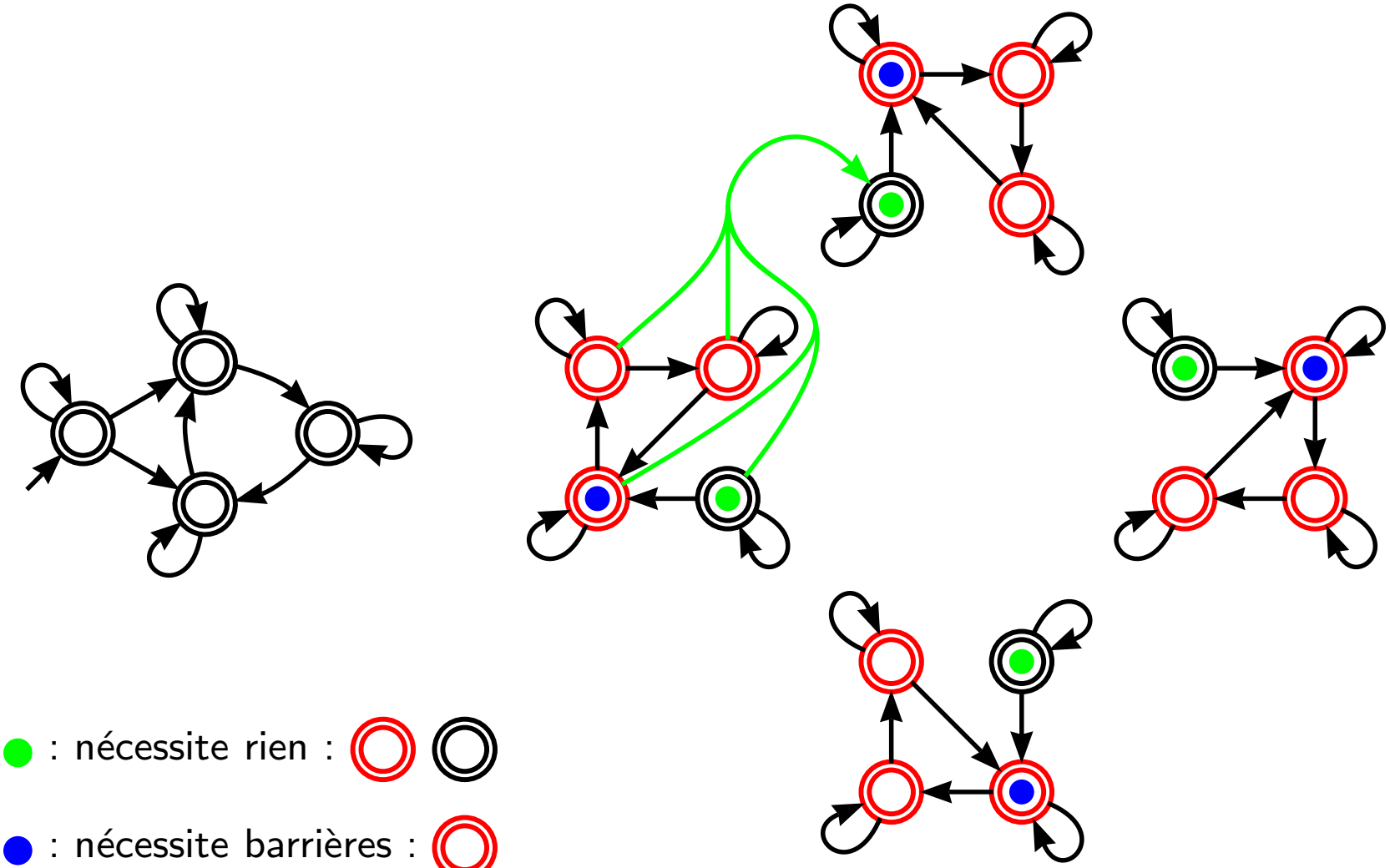
Automate pour 4 brins



● : nécessite rien : ◎ ◎

● : nécessite barrières

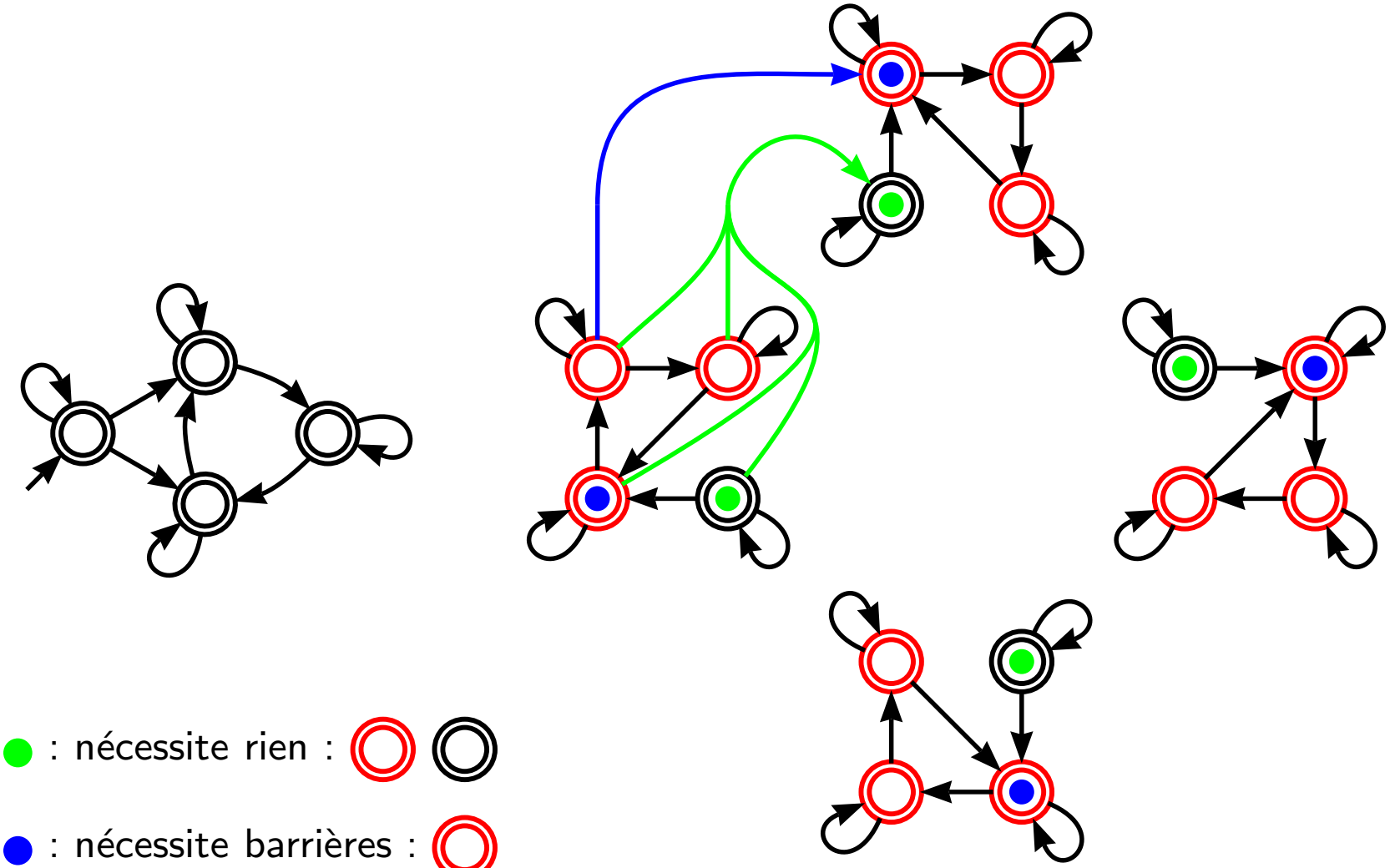
Automate pour 4 brins



● : nécessite rien : ◎ ◎

● : nécessite barrières : ◎

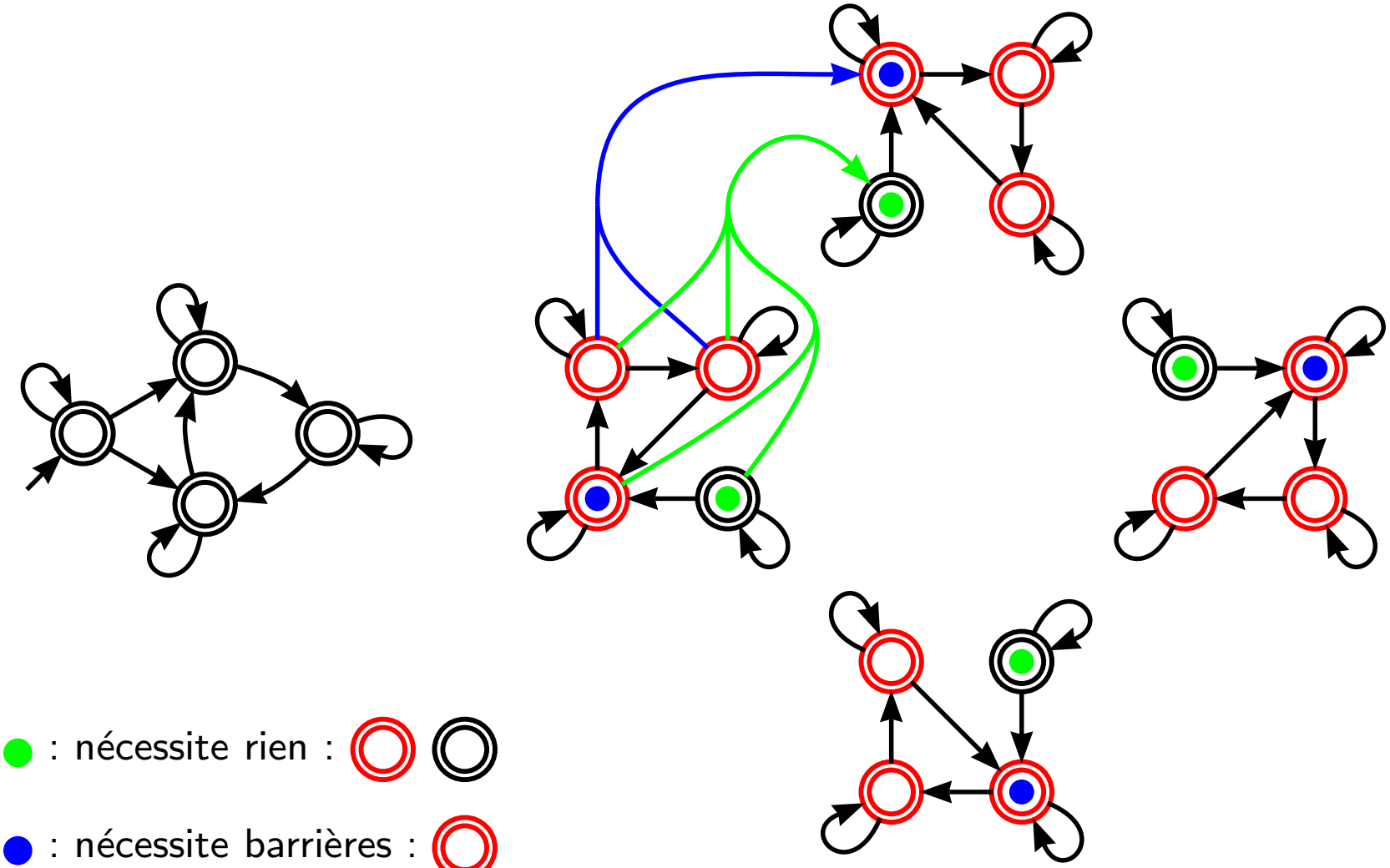
Automate pour 4 brins



● : nécessite rien : ◎ ◎

● : nécessite barrières : ◎

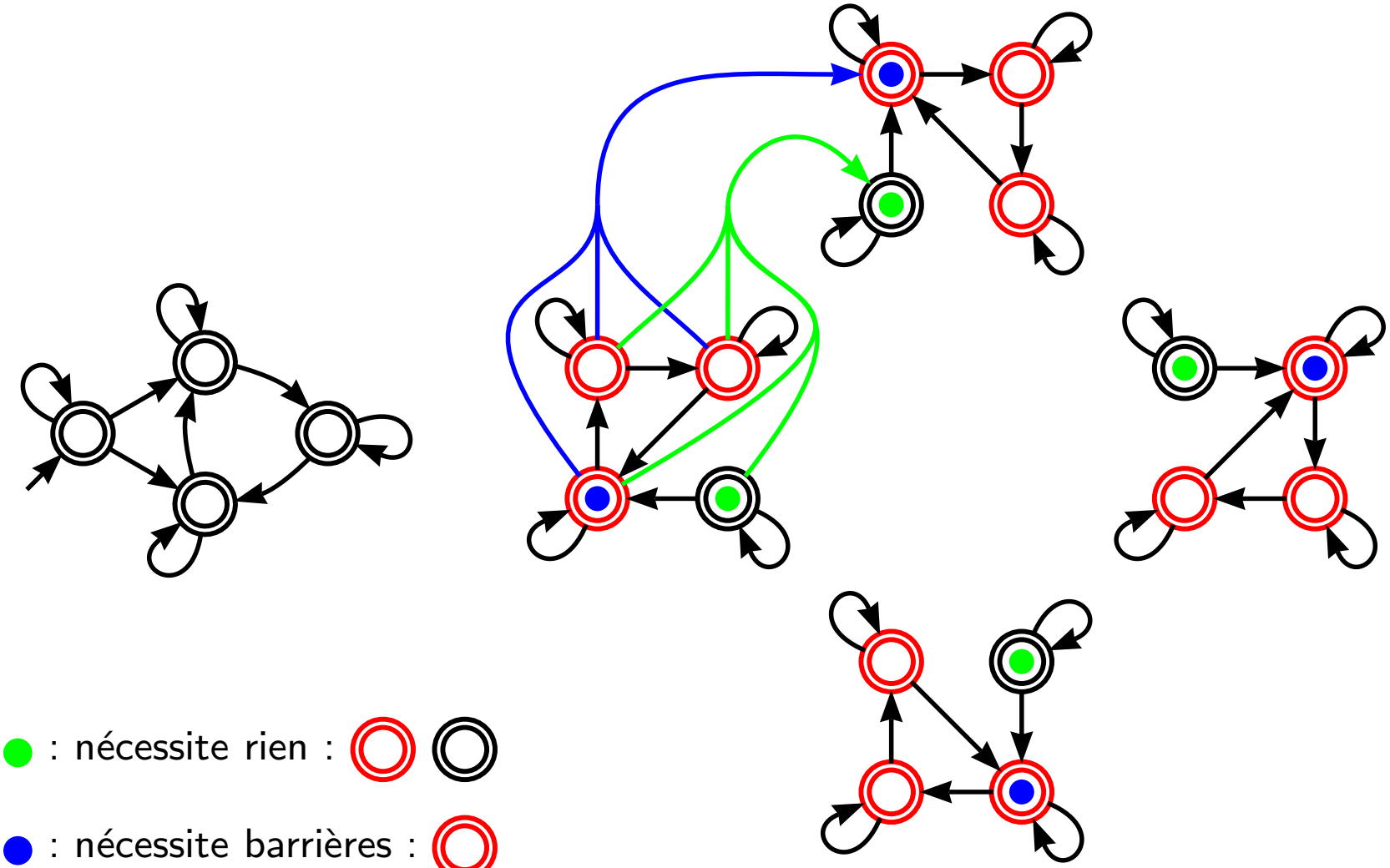
Automate pour 4 brins



● : nécessite rien : ◎ ◎

● : nécessite barrières : ◎

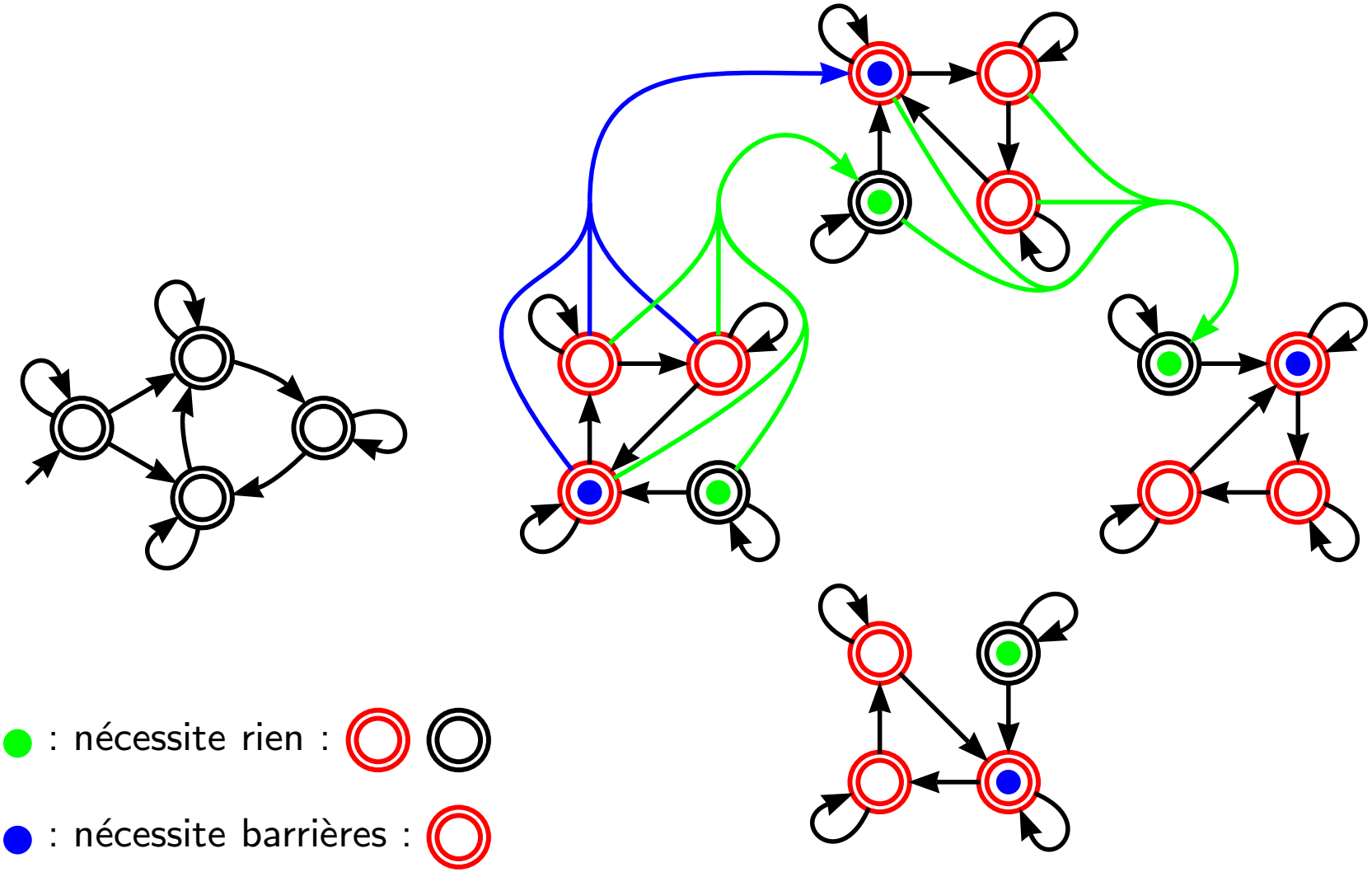
Automate pour 4 brins



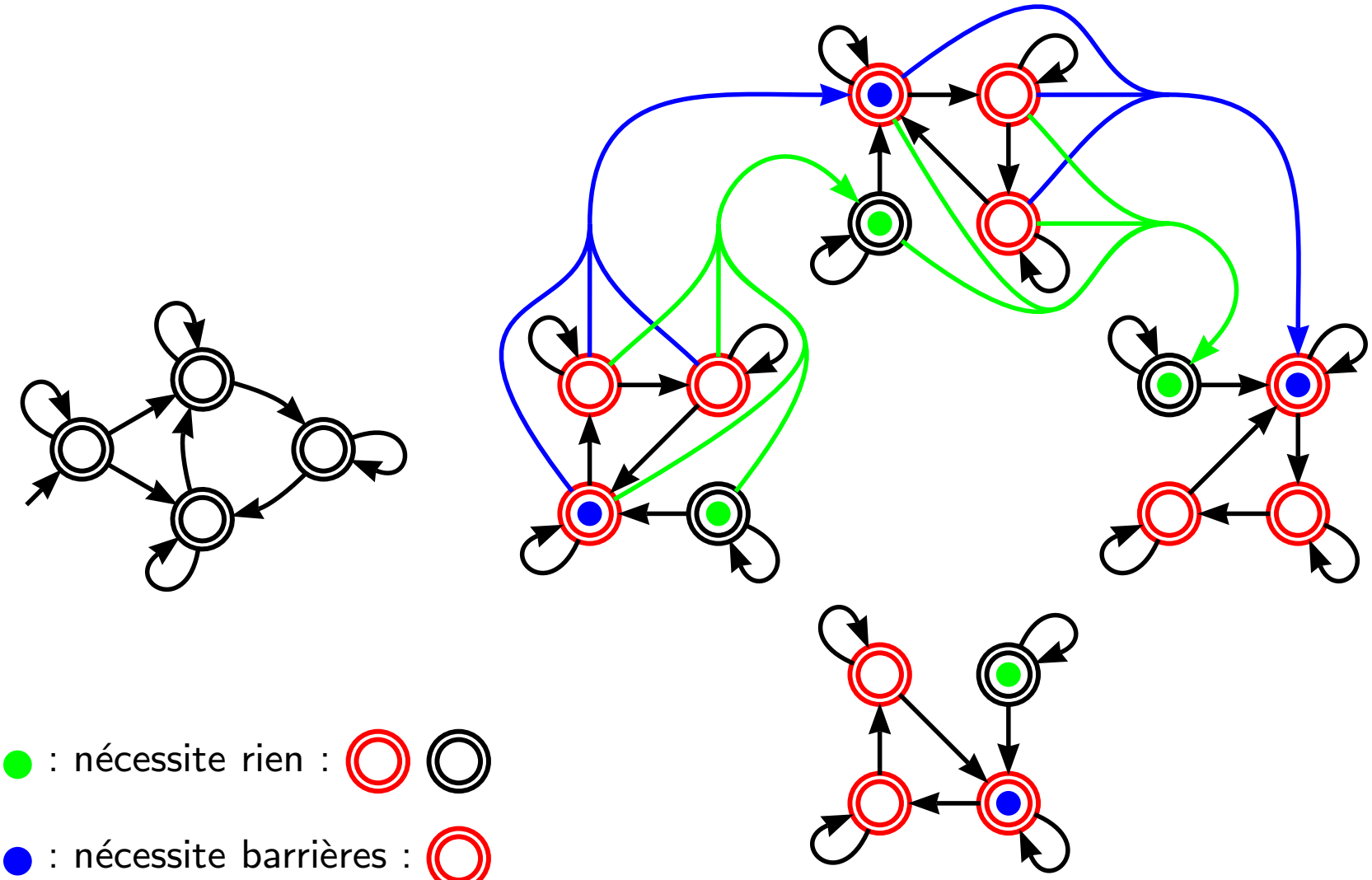
● : nécessite rien : ◎ ◎

● : nécessite barrières : ◎

Automate pour 4 brins



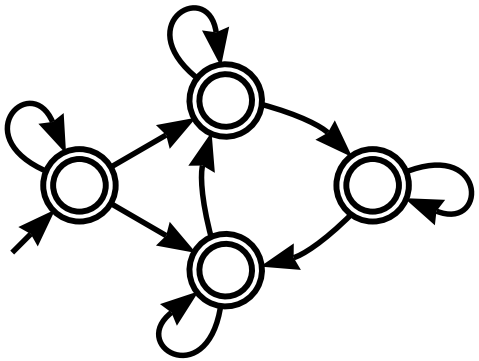
Automate pour 4 brins

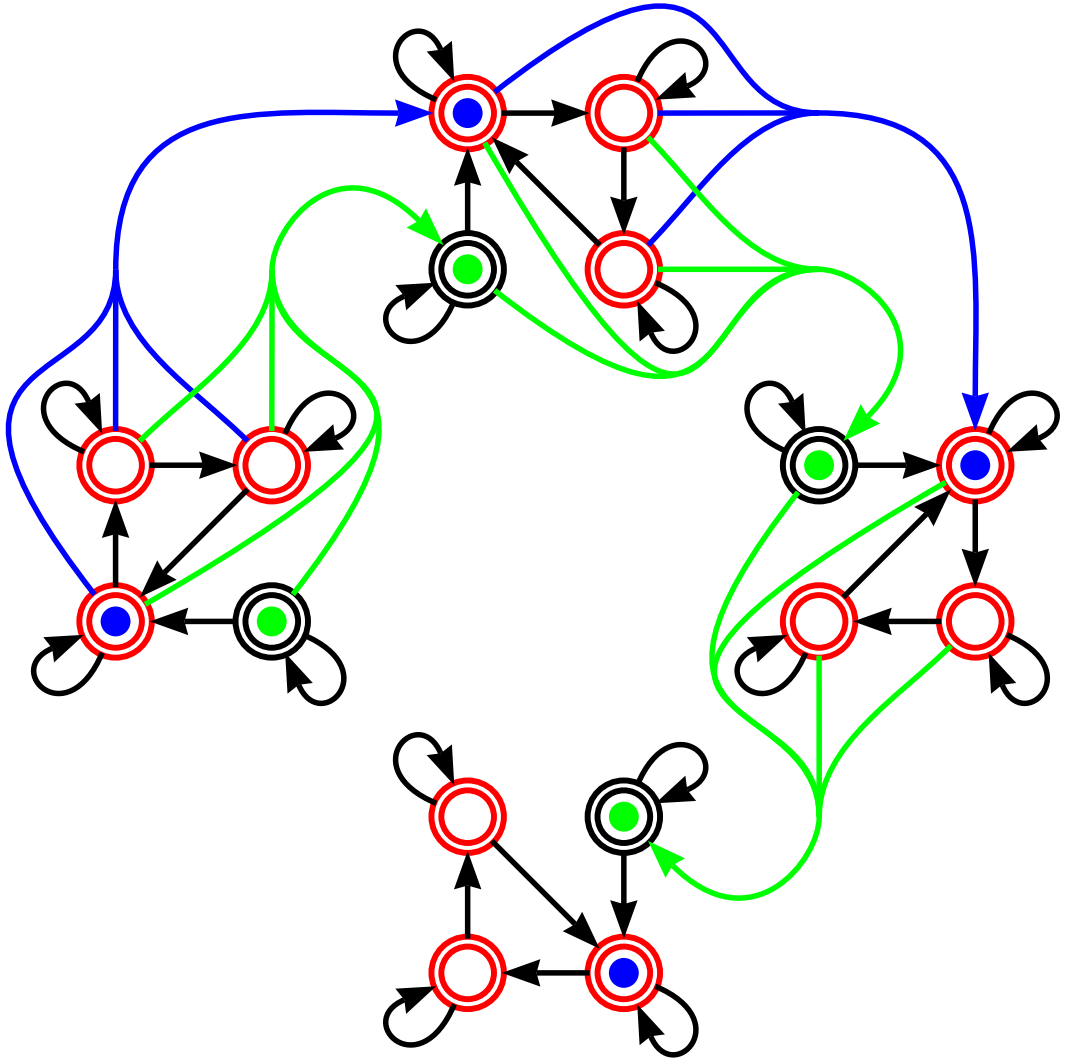


● : nécessite rien : ◎ ◯

● : nécessite barrières : ◎

Automate pour 4 brins

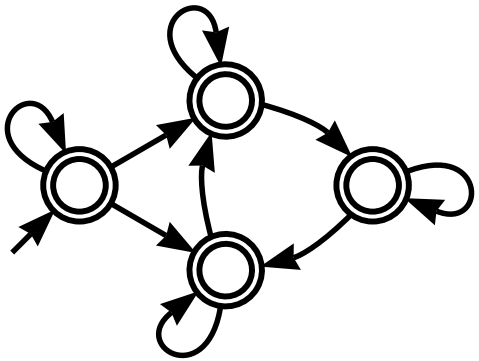


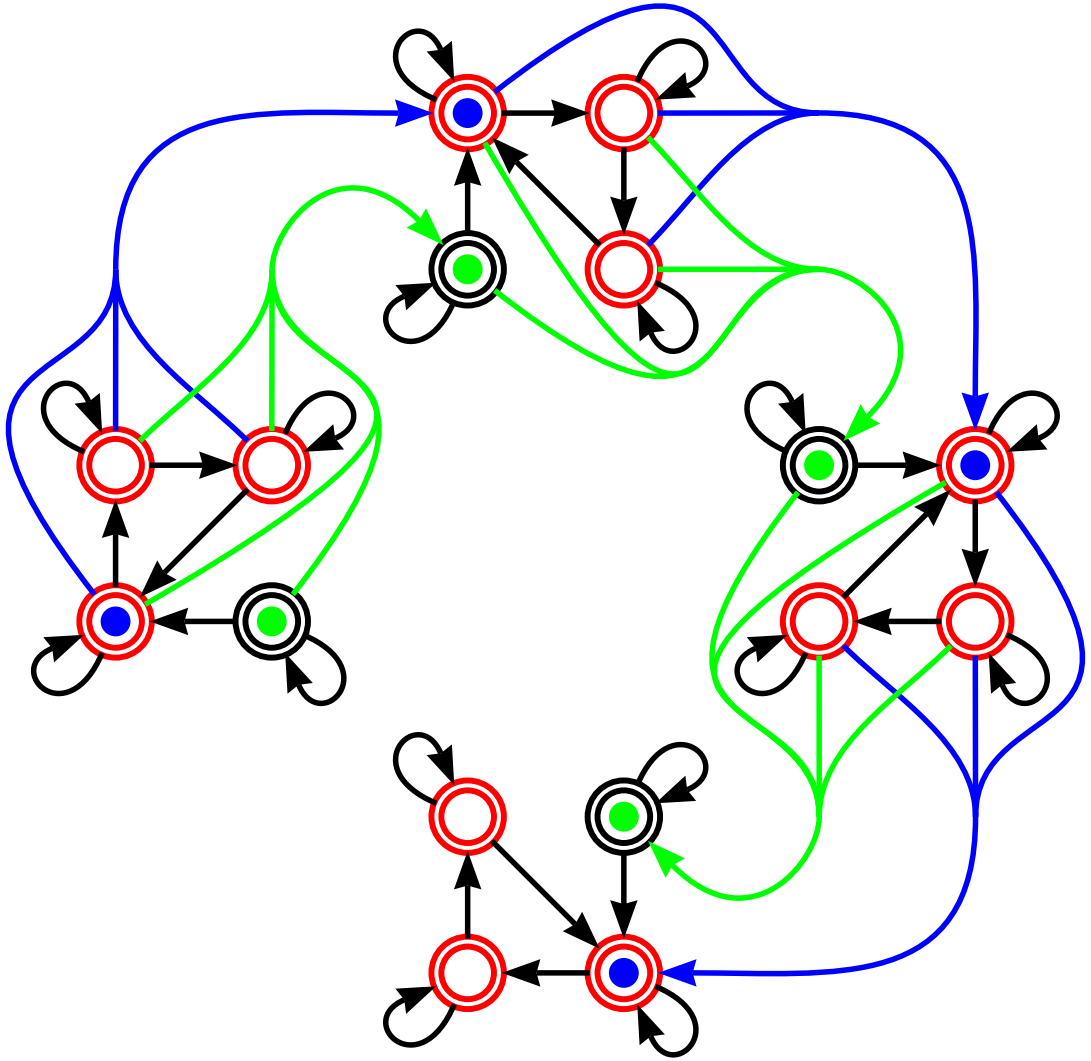


● : nécessite rien :

● : nécessite barrières :

Automate pour 4 brins

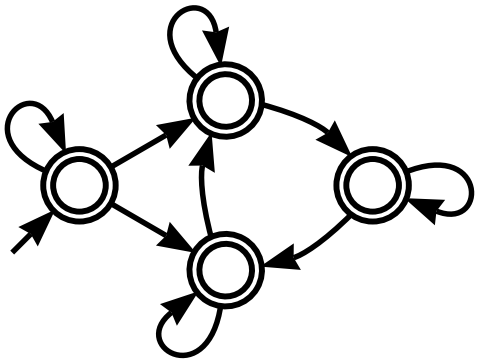


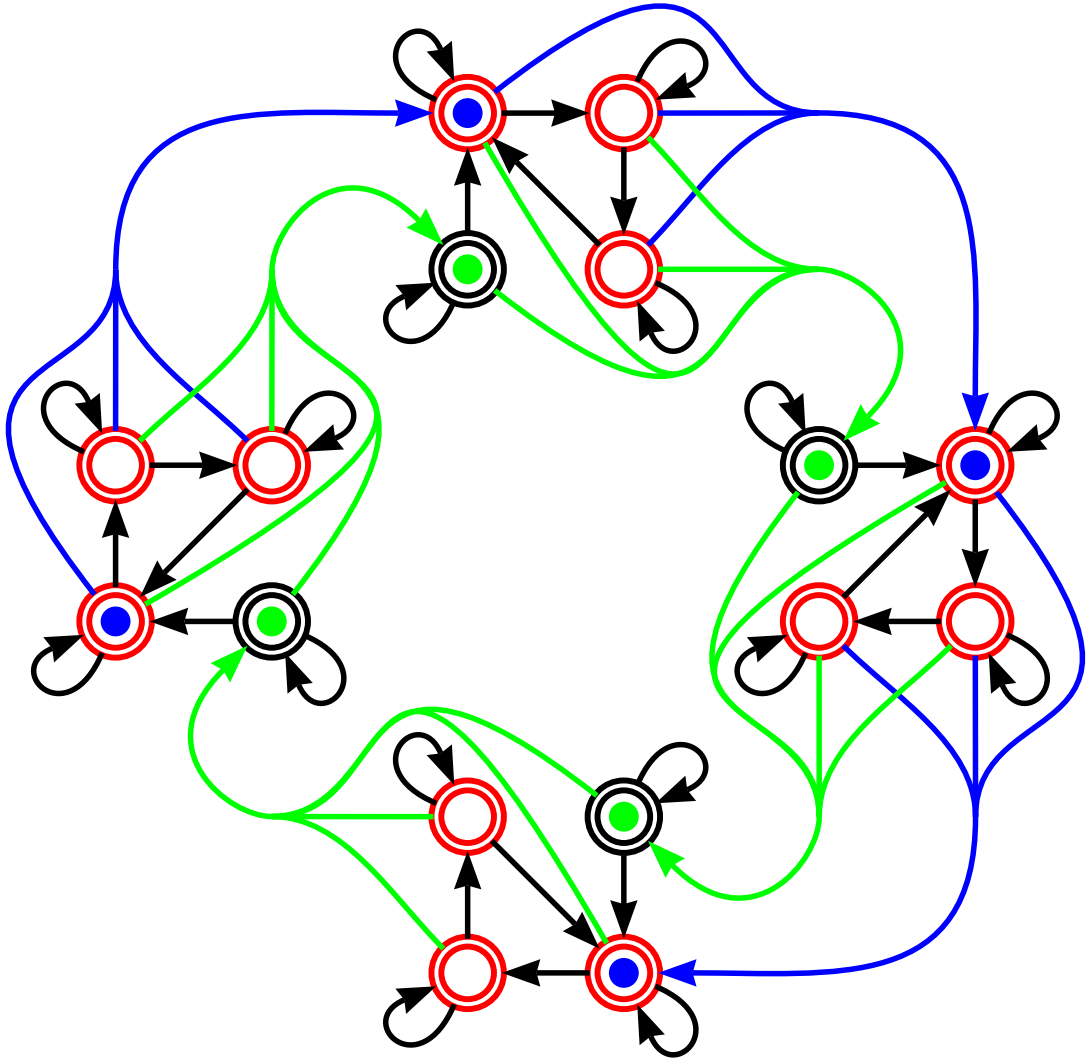


● : nécessite rien : ◎ ◯

● : nécessite barrières : ◎

Automate pour 4 brins

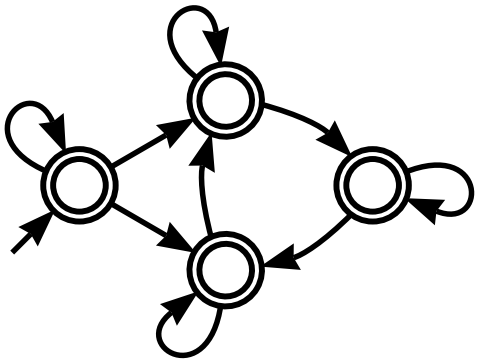


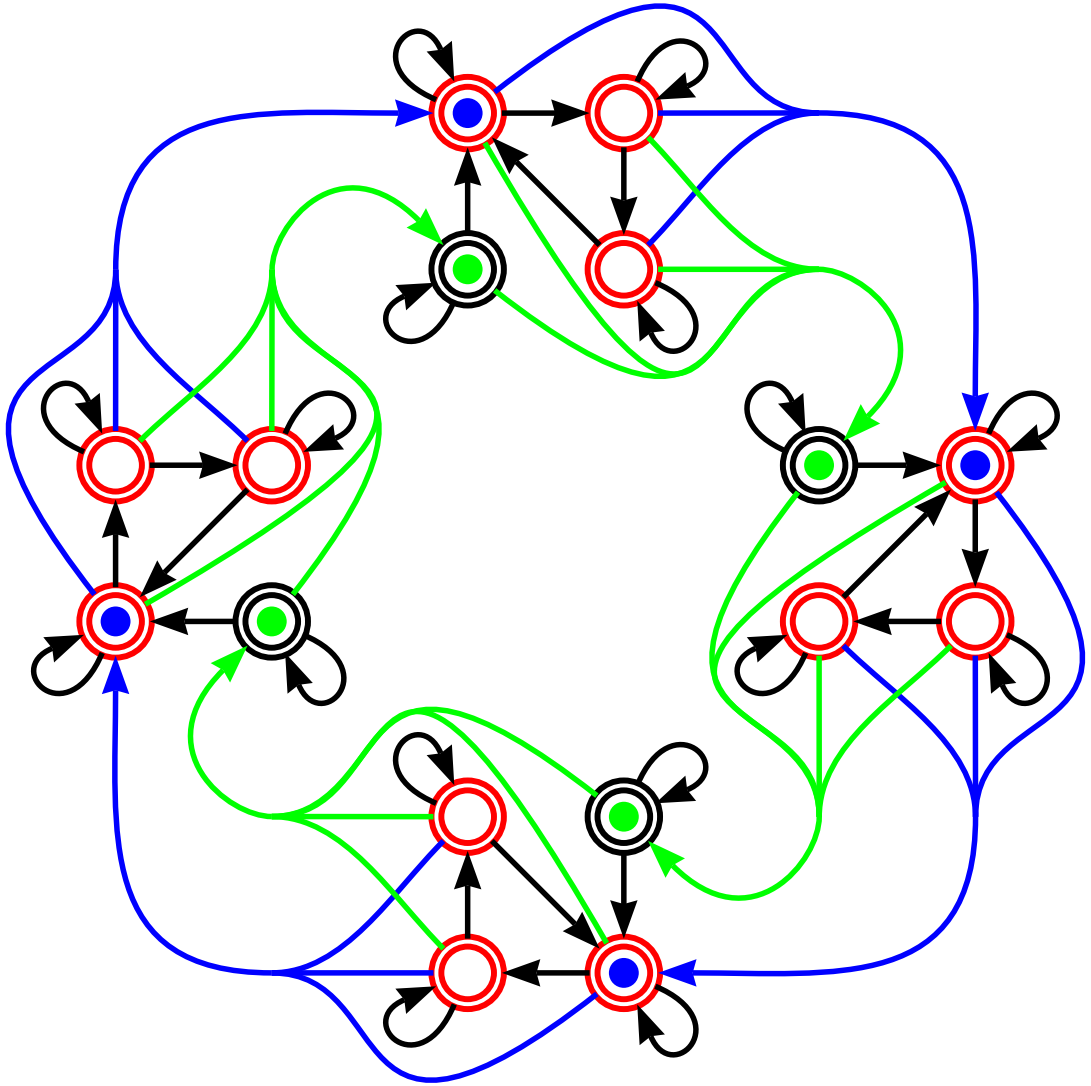


● : nécessite rien : ◎ ◎

● : nécessite barrières : ◎

Automate pour 4 brins

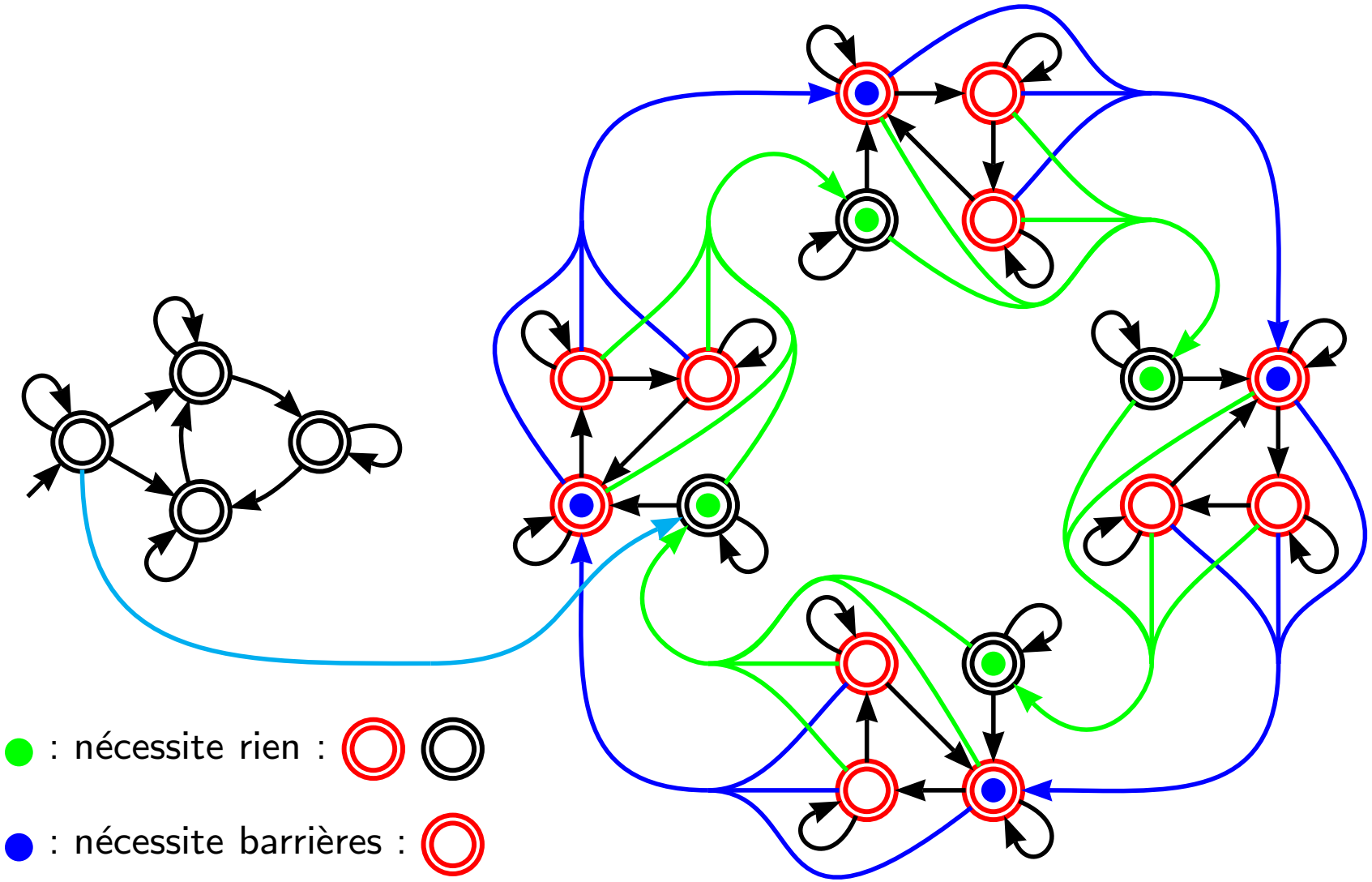




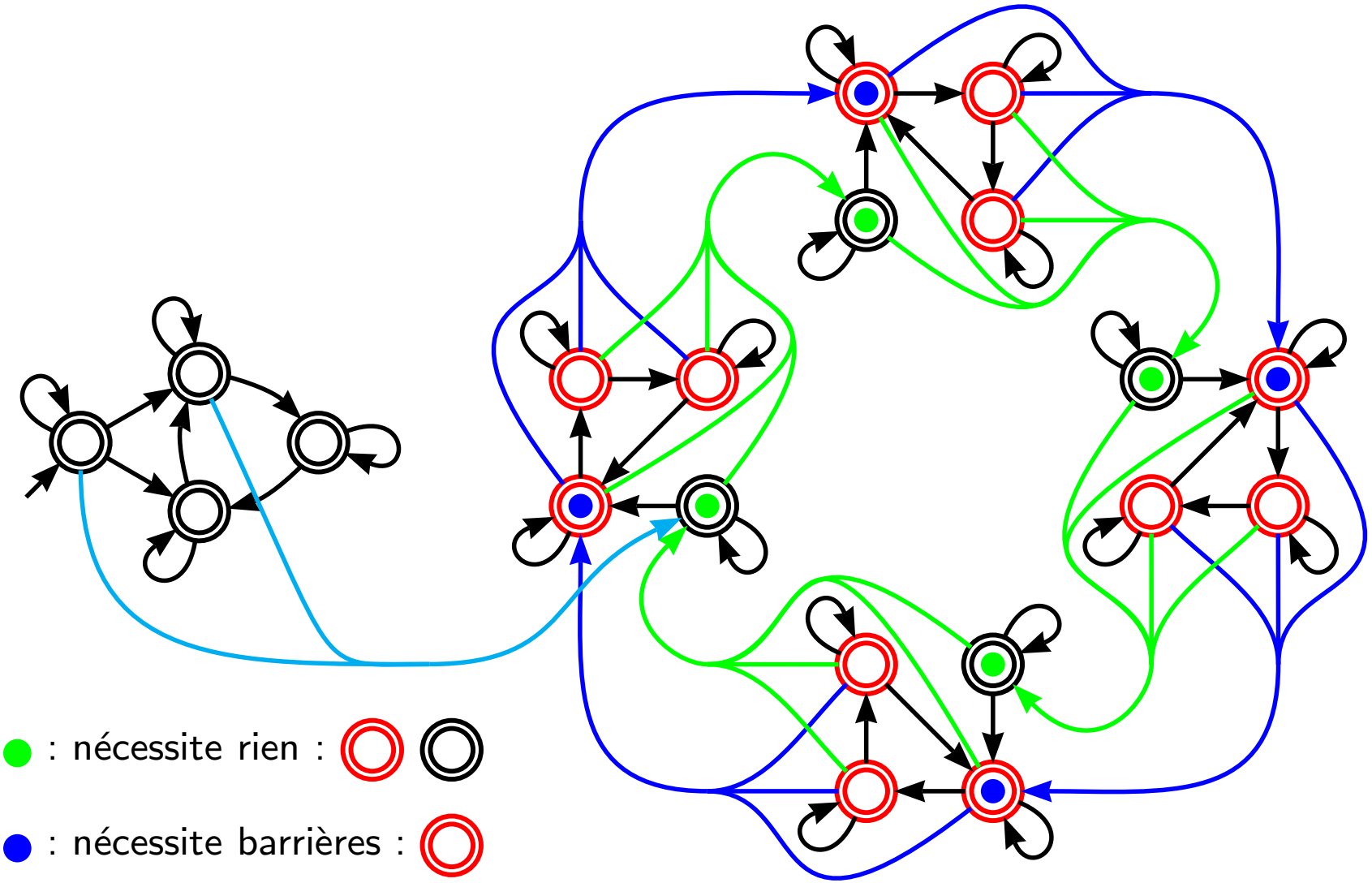
● : nécessite rien : ◎ ◎

● : nécessite barrières : ◎

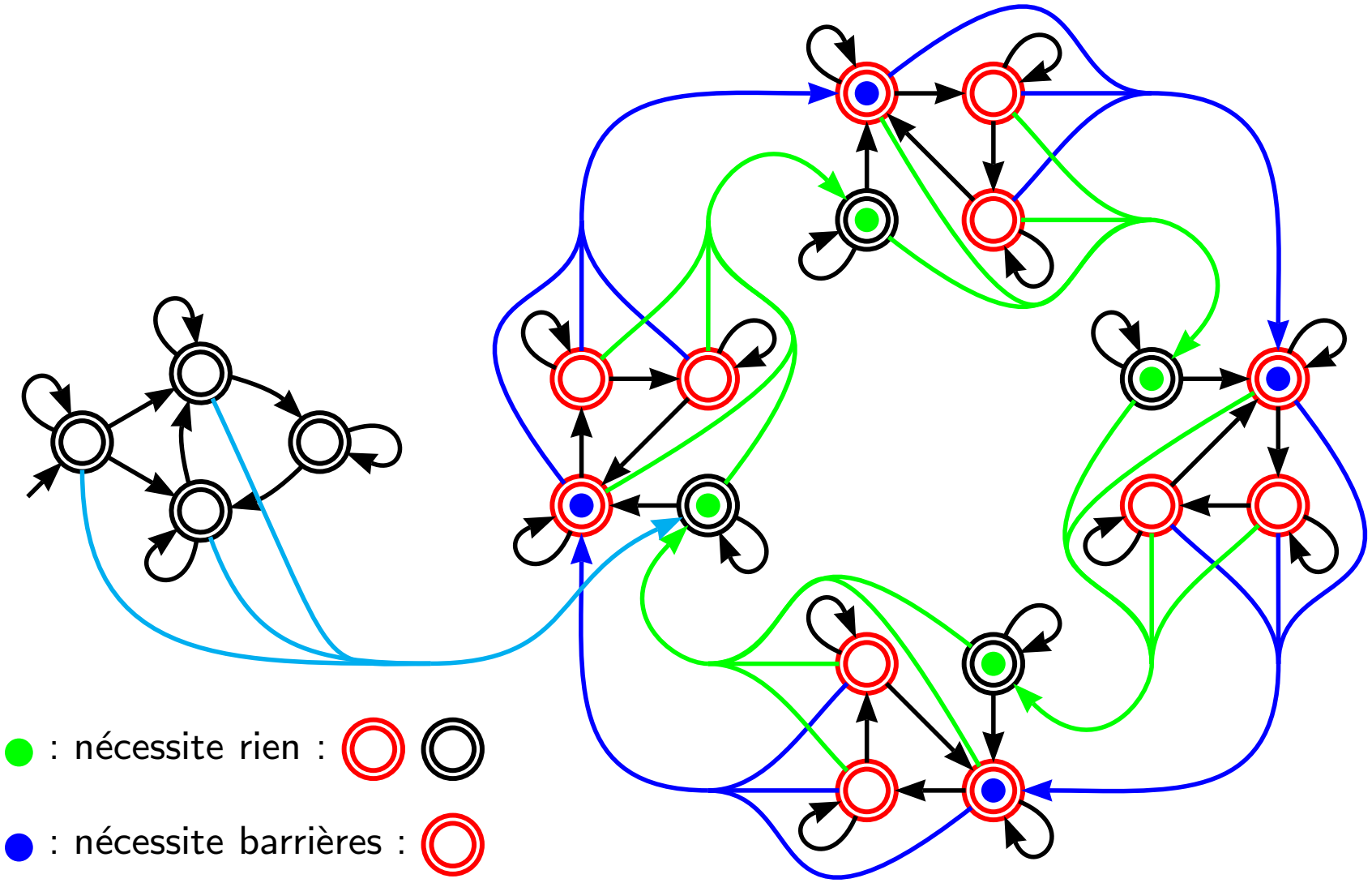
Automate pour 4 brins



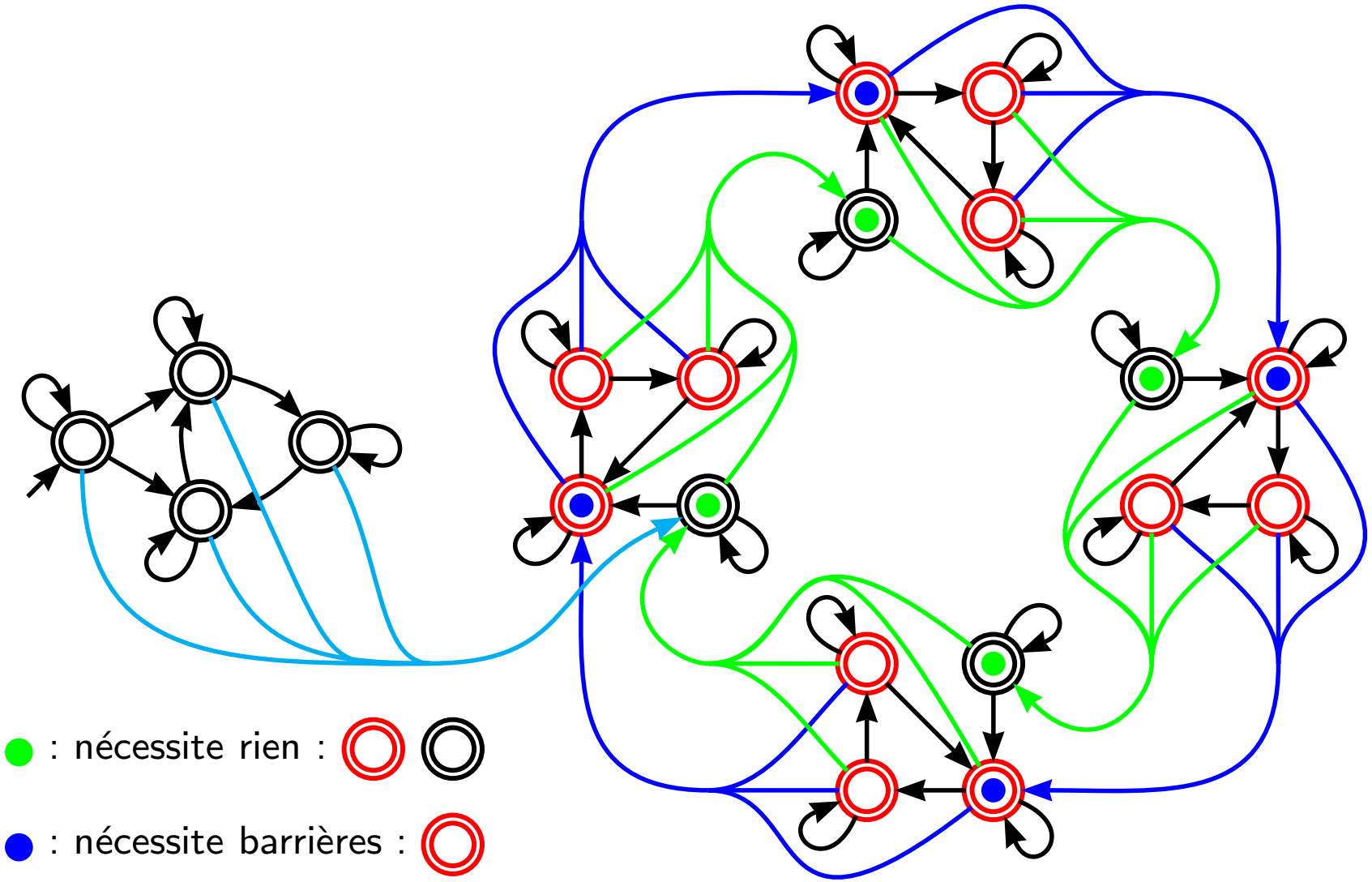
Automate pour 4 brins



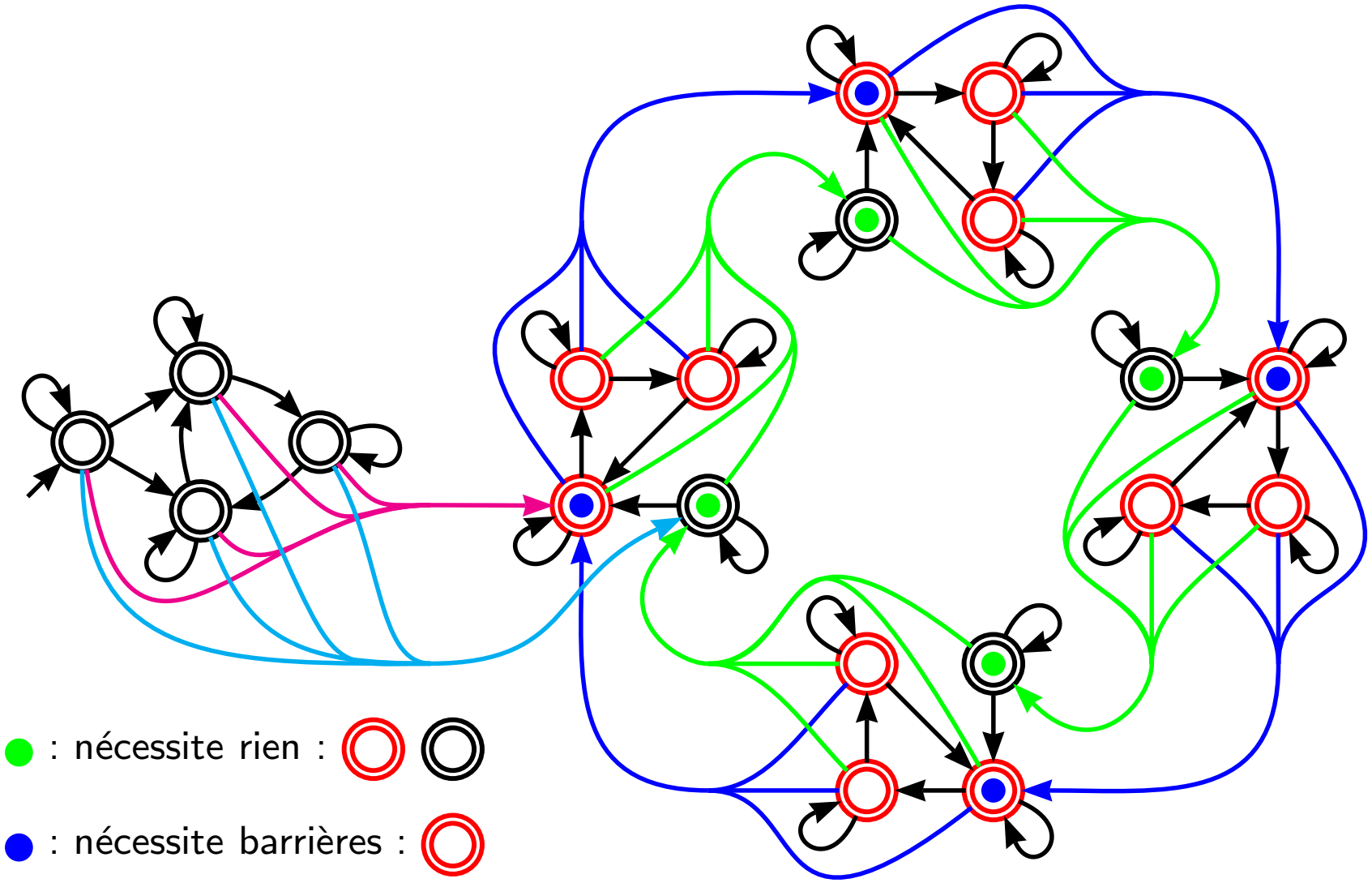
Automate pour 4 brins



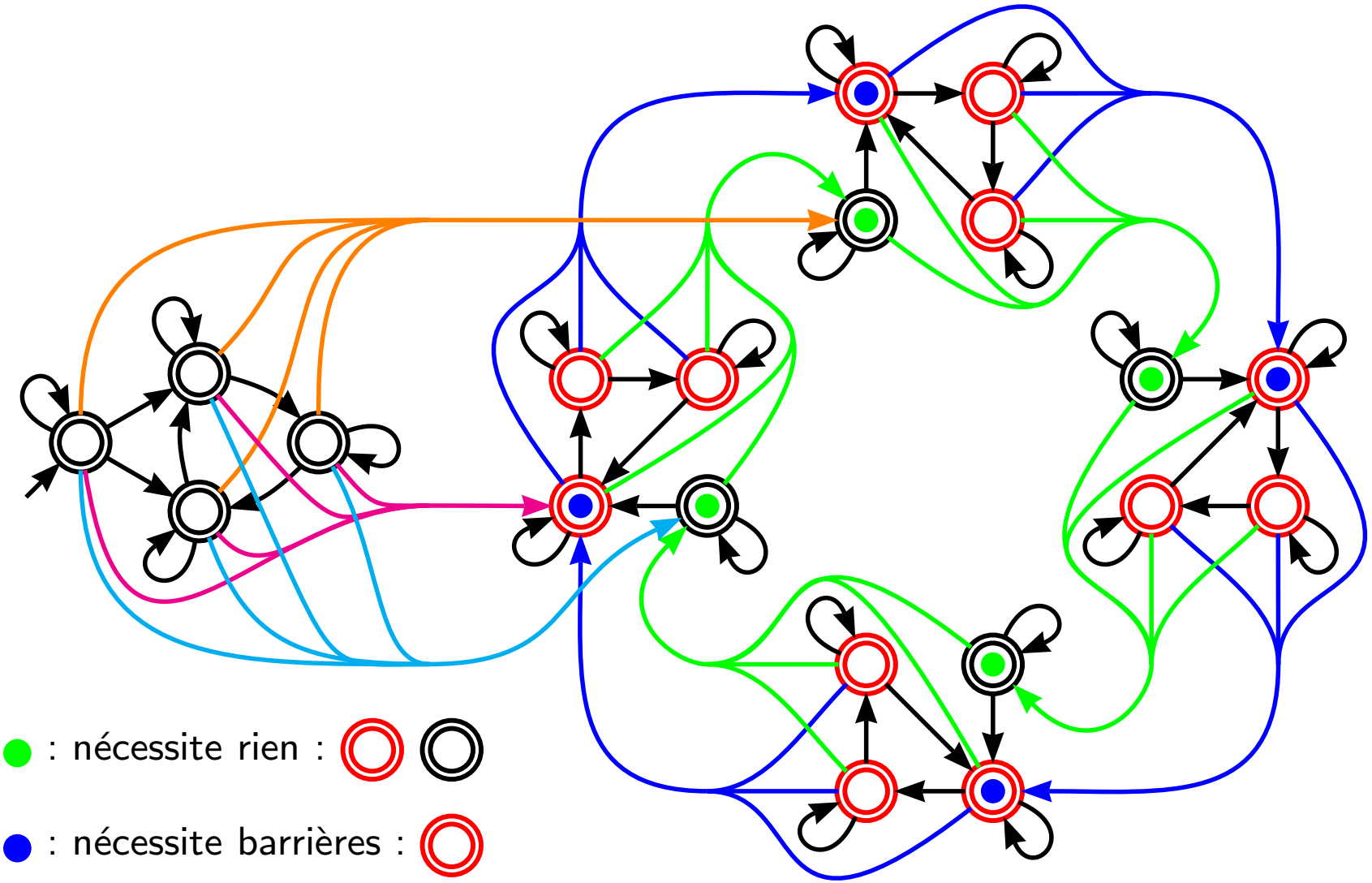
Automate pour 4 brins



Automate pour 4 brins



Automate pour 4 brins



Séries génératrices

Pour 3 brins :

Séries génératrices

Pour 3 brins :

$$\frac{1}{2t^2 - 3t + 1}$$

Séries génératrices

Pour 3 brins :

$$\frac{1}{2t^2-3t+1} = 1+3t+7t^2+15t^3+31t^4+63t^5+127t^6+255t^7+511t^8 + 1023t^9 + O(t^{10})$$

Pour 4 brins :

Séries génératrices

Pour 3 brins :

$$\frac{1}{2t^2 - 3t + 1} = 1 + 3t + 7t^2 + 15t^3 + 31t^4 + 63t^5 + 127t^6 + 255t^7 + 511t^8 + 1023t^9 + O(t^{10})$$

Pour 4 brins :

$$\frac{1}{-5t^3 + 10t^2 - 6t + 1}$$

Séries génératrices

Pour 3 brins :

$$\frac{1}{2t^2-3t+1} = 1+3t+7t^2+15t^3+31t^4+63t^5+127t^6+255t^7+511t^8 + 1023t^9 + O(t^{10})$$

Pour 4 brins :

$$\frac{1}{-5t^3+10t^2-6t+1} = 1+6t+26t^2+101t^3+376t^4+1376t^5+5001t^6 + 18126t^7 + 65626t^8 + 237501t^9 + O(t^{10})$$

Autres utilisations

- Généralisation aux ordres de Nielsen-Thuston de type fini (T. Ito).

Autres utilisations

- Généralisation aux ordres de Nielsen-Thuston de type fini (T. Ito).

- Étude du problème de conjugaison (avec V. Gebhardt).

Autres utilisations

- Généralisation aux ordres de Nielsen-Thuston de type fini (T. Ito).

- Étude du problème de conjugaison (avec V. Gebhardt).

- Problème de conjugaison : Pour β, β' dans B_n, décider s'il existe γ dans B_n telle qu'on ait $\beta = \gamma^{-1}\beta'\gamma$.

Autres utilisations

- Généralisation aux ordres de Nielsen-Thuston de type fini (T. Ito).

- Étude du problème de conjugaison (avec V. Gebhardt).

- Problème de conjugaison : Pour β, β' dans B_n, décider s'il existe γ dans B_n telle qu'on ait $\beta = \gamma^{-1}\beta'\gamma$.

$\rightsquigarrow$ Equivalent à : Pour β , γ dans B_n^{+*}, décider s'il existe β' dans B_n^{+*} telle qu'on ait $\beta = \beta'^{-1}\gamma\gamma$.

Autres utilisations

- Généralisation aux ordres de Nielsen-Thuston de type fini (T. Ito).

- Étude du problème de conjugaison (avec V. Gebhardt).

- Problème de conjugaison : Pour β, β' dans B_n, décider s'il existe γ dans B_n telle qu'on ait $\beta = \gamma^{-1}\beta'\gamma$.

$\rightsquigarrow$ Equivalent à : Pour β , γ dans B_n^{+*}, décider s'il existe β' dans B_n^{+*} telle qu'on ait $\beta = \beta'^{-1}\gamma\gamma$.

- Lien avec :

Autres utilisations

- Généralisation aux ordres de Nielsen-Thuston de type fini (T. Ito).

- Étude du problème de conjugaison (avec V. Gebhardt).

- Problème de conjugaison : Pour β, β' dans B_n, décider s'il existe γ dans B_n telle qu'on ait $\beta = \gamma^{-1}\beta'\gamma$.

$\rightsquigarrow$ Equivalent à : Pour β , γ dans B_n^{+*}, décider s'il existe β' dans B_n^{+*} telle qu'on ait $\beta = \beta'^{-1}\gamma\gamma$.

- Lien avec :
  – la cryptographie des tresses,

Autres utilisations

- Généralisation aux ordres de Nielsen-Thuston de type fini (T. Ito).

- Étude du problème de conjugaison (avec V. Gebhardt).

- Problème de conjugaison : Pour β, β' dans B_n, décider s'il existe γ dans B_n telle qu'on ait $\beta = \gamma^{-1}\beta'\gamma$.

$\rightsquigarrow$ Equivalent à : Pour β , γ dans B_n^{+*}, décider s'il existe β' dans B_n^{+*} telle qu'on ait $\beta = \beta'^{-1}\gamma\gamma$.

- Lien avec :
  - la cryptographie des tresses,
  - la théorie des noeuds.

Merci ! ! !