Algèbres de Hopf combinatoires et posets

Résumé

A chaque poset (ensemble fini partiellement ordonné) sont associées une famille de partitions, les P-partitions, et une famille de permutations, les extensions linéaires, liées par le théorème de Stanley. La somme des P-partitions est une fonction quasi-symétrique, et la symétrie de cette fonction semble être caractérisée par une condition nécessaire et suffisante en terme de tableaux de Young sur le poset : c'est la conjecture de Stanley, dont on ne connaît à ce jour ni preuve ni contrexemple.

Les différents objets combinatoires utilisés par Stanley ont été munis d'une structure d'algèbre de Hopf combinatoire, en grande partie dans les travaux de Malvenuto et Reutenauer. Il s'agit d'utiliser ce cadre algébrique pour reformuler les résultats combinatoires de Stanley et d'en tirer de nouvelles conséquences ; le but étant de progresser vers la preuve ou l'infirmation de la conjecture de Stanley. En particulier, il semble que nombre de résultats de Stanley se généralise en remplaçant les permutations par les compositions ensemblistes, les objets remplaçants les posets restant à préciser.

D'autre part, les travaux d'Ecalle sur le calcul moulien suggèrent que le processus d'arborification peut s'étendre en un processus de "posetification", en remplaçant le rôle joué par l'algèbre des arbres de Connes-Kreimer par l'algèbre des posets. Il s'agit de décrire précisément ce processus ainsi que les conséquences possibles sur le calcul moulien ainsi que la renormalisation et la théorie des chemins rugueux, qui utilisent également l'algèbre de Connes-Kreimer.

Présentation du sujet

La théorie des algèbres de Hopf combinatoires, connaît depuis une décennie un développement important, dans des cadres aussi divers que la théorie des champs quantiques et la renormalisation, l'étude des fonctions symétriques et des représentations des groupes symétriques, la théorie probabilistes des chemins rugueux ou encore la théorie du contrôle. Voici quelques exemples d'objets étudiés dans cette théorie :

- L'algèbre de Hopf des fonctions quasi-symétriques et sa sous-algèbre des fonctions symétriques. Ces algèbres classiques sont respectivement basées sur les compositions et sur les partitions ; elles sont toutes deux commutatives ; la première est non cocommutative alors que la seconde est cocommutative.
- L'algèbre de Hopf des permutations **FQSym**, introduite dans [4]. Cette algèbre de Hopf peut être vue comme une version "libre" des fonctions quasi-symétriques ; elle n'est ni commutative, ni cocommutative et est isomorphe à son dual.
- L'algèbre de Hopf des ordres partiels (posets) doubles, introduite dans [5] et étudiée dans [3]. Cet objet contient par exemple deux sous-algèbres de Hopf isomorphes à l'algèbre des permutations précédente, l'une basée sur les posets plans, l'autre basée sur les forêts ordonnées en tas. Cette dernière est également utilisée par la théorie des chemins rugueux.

Ces objets fournissent un cadre algébrique à une conjecture de Stanley [6], classiquement énoncée de manière purement combinatoire. A chaque poset spécial est associé une famille d'objets combinatoires, appelés P-partitions ; lorsque le poset spécial est totalement ordonné, on retrouve la notion usuelle de partition. L'ensemble des P-partitions se décompose en union disjointe de différents ensembles, indexés par certaines permutations, les extensions linéaires du poset spécial. En sommant toutes les P-partitions, on obtient une fonction quasi-symétrique, appelée la fonction génératrice du poset.

Lorsque le poset spécial est obtenu à partir d'un tableau de Young ou plus généralement d'un ruban obtenu par différence de deux tableaux de Young emboîtés, alors sa série génératrice est symétrique. La réciproque est connue sous le nom de conjecture de Stanley : on n'en connaît à ce jour ni démonstration, ni contrexemple. Il est démontré dans [5] que la congruence plaxique, associant à chaque permutation un tableau de Young, permet de donner une formulation équivalente à la conjecture de Stanley. La congruence plaxique permet également de définir une algèbre de Hopf des tableaux de Young, dûe à Reutenauer et Poirier.

Ce sujet de thèse se propose de construire un cadre algébrique rigoureux dans le but d'établir cette conjecture. En particulier :

1. Il est établi que l'application associant à un poset spécial la somme de ses extensions linéaires est un morphisme de l'algèbre de Hopf des posets spéciaux vers **FQSym**. Cela reste à établir pour les autres objets combinatoires utilisés par Stanley, tels que les P-partitions ou les séries génératrices. Il s'agit donc d'établir quelles sont les algèbres de Hopf à considérer ainsi que les morphismes correspondants aux différents résultats de Stanley. Quelles conséquences la compatibilité de ces morphismes avec les coproduits entraîne-t-elle ?
2. La construction de l'algèbre de Hopf des fonctions quasi-symétriques **FQSym** libres se généralise des permutations aux compositions ensemblistes. L'objet obtenu, appelé **WQSym**, bien que semblable à **FQSym**, est beaucoup plus mal connu. On ne lui connaît pas par exemple de couplage de Hopf non dégénéré, bien qu'il soit auto-dual. Si on remplace **FQSym** par **WQSym**, par quels objets remplacer les posets spéciaux ? Il existe de nombreux candidats à cette généralisation : hyperarbres, graphes transitifs, quasi-posets... Que deviendrait pour ces objets la notion de P-partitions ?
3. Comment généraliser la congruence plaxique à **WQSym** ? Quelles conséquences cela a-t-il sur la conjecture de Stanley et sur la connaissance de **WQSym** ?
4. D'autre part, l'un des sous-quotients de l'algèbre de Hopf des posets est l'algèbre des arbres plans de Connes et Kreimer [1], qui apparaît dans le contexte du calcul moulien d'Ecalle via le processus d'arborification, ainsi que dans la théorie des chemins rugueux. Il est suggéré dans [2] que le processus d'arborification peut s'étendre en un processus d'arborification, qui reste à décrire. Quel est ce processus, et comment l'exprimer à l'aide de l'algèbre de Hopf des posets plans ? Peut-on également "posetifier" plutôt qu'arborifier dans le contexte de la renormalisation des théorie de champs quantiques ou des chemins rugueux ?

Objectifs et résultats attendus

Ce sujet de thèse propose les directions de recherche suivantes :

1. Obtention d'une structure d'algèbre de Hopf sur les rubans, à l'aide de la structure de Hopf sur les posets doubles ; cette structure devrait être obtenue comme sous-algèbre ou quotient de l'algèbre des posets doubles. Etude de cette structure (liberté, coliberté, auto-dualité...) et lien avec l'algèbre des permutations et l'algèbre des tableaux de Poirier et Reutenauer, à l'aide de la congruence plaxique.
2. Généralisation des morphismes d'algèbres de Hopf des permutations, posets doubles, rubans ou tableaux vers l'algèbre des fonctions quasi-symétriques en remplaçant les permutations par des compositions ensemblistes. Il s'agit également d'étendre la notion de poset spécial et de tableaux de Young standard. Etude de ces morphismes (surjectivité, noyau...).

Application à l'étude de **WQSym** (autodualité, structures algébriques supplémentaires induites...).

3. Utilisation de ces constructions et de leurs propriétés pour établir (ou infirmer) la conjecture de Stanley.
4. Application au cacul moulien d'Ecalle et à la résurgence.

Contexte scientifique national et international

Ces thématiques s'insèrent dans le programme du GDR CNRS "Renormalisation : aspects algébriques, analytiques et géométriques" (*http ://renorm.math.cnrs.fr/spip.php ?rubrique1*) ainsi que dans programme de l'ANR "Combinatoire Algébrique, Moules, Résurgence et Applications" (*http ://monge.univ-mlv.fr/ jyt/CARMA/*). Elles ont également fait l'objet d'un poste de professeur invité à l'université La Sapienza Roma I à l'automne 2013.

Références

[1] Alain Connes and Dirk Kreimer, *Hopf algebras, Renormalization and Noncommutative geometry*, Comm. Math. Phys **199** (1998), no. 1, 203–242, arXiv :hep-th/9808042.

[2] Jean Ecalle, *Les fonctions résurgentes, Vol.1,2,3*, Publ.Math.Orsay, 1981–1985.

[3] Loïc Foissy, *Algebraic structures on double and plane posets*, J. Algebraic Combin. **37** (2013), no. 1, 39–66, arXiv :1101.5231.

[4] Clauda Malvenuto and Christophe Reutenauer, *Duality between quasi-symmetric functions and the Solomon descent algebra*, J. Algebra **177** (1995), no. 3, 967–982.

[5] Claudia Malvenuto and Christophe Reutenauer, *A self paired Hopf algebra on double posets and a Littlewood-Richardson rule*, J. Combin. Theory Ser. A **118** (2011), no. 4, 1322–1333, arXiv :0905.3508.

[6] Richard P. Stanley, *Ordered structures and partitions*, American Mathematical Society, Providence, R.I., 1972, Memoirs of the American Mathematical Society, No. 119.