Ecole doctorale régionale Sciences Pour l'Ingénieur
Lille Nord-de-France - 072

Titre : Morphismes entre quantales de Grothendieck

Directeur de thèse : Isar Stubbe
E-mail : isar.stubbe@lmpa.univ-littoral.fr
Co-directeur de thèse :
E-mail :

Laboratoire : LMPA EA2597, ULCO, Calais
Equipe de recherche : Algèbre

Descriptif :
Depuis les travaux de Walters [1982], on sait comment associer, à un site de Grothendieck (C,J), un quantaloïde R(C,J) de telle manière que le topos Sh(C,J) des faisceaux sur le site est équivalent à une catégorie de catégories enrichies dans R(C,J). Récemment, les quantaloïdes ainsi obtenus ont été caractérises de manière élémentaire [Heymans and Stubbe, 2012a]; de plus, un tel "quantaloïde de cribles fermés" se produit toujours par le scindage d'idempotents dans un "quantale de Grothendieck" [Heymans and Stubbe, 2012b]. Ces résultats permettent en particulier d'étudier les faisceaux sur un site de Grothendieck en termes d'ensembles muni d'une égalité à valeurs de vérité dans un quantale.

Maintenant se pose naturellement la question: et les morphismes entre sites alors? C'est exactement le sujet de la recherche doctorale proposée ici.

Tout d'abord, on devra s'intéresser aux différentes définitions de "morphisme continu entre sites"; la référence par excellence sera le livre de Johnstone [2002], mais aussi le récent article de Shulman [2012] sera étudié. Puis on déterminera la correspondence entre les morphismes de sites d'une part, et les morphismes de quantaloïdes et de quantales de l'autre. Le but, bien évidemment, sera d'arriver à une équivalence de la catégorie des sites à des catégories adéquates de quantaloïdes de cribles fermés, resp. de quantales de Grothendieck. Ayant établi cette équivalence, on étudiera tout d'abord la Morita équivalence de sites [Carmello, 2012] en termes de quantaloïdes/quantales. On déterminera ensuite la place que prennent les "inverse quantal frames" déterminés par les groupoïdes locaux [Resende, 2007]. Ces résultats permettront finalement une démonstration quantaloïdale du célèbre théorème de Joyal-Tierney [1984] (disant, en gros, que "tout topos de faisceaux sur un site est équivalent à la catégorie des actions continus d'un groupoïde local").

Références :
[Caramello, 2012] Site characterizations for geometric invariants of toposes, Theory and Applications of Categories.
[Heymans et Stubbe, 2012a] Elementary characterisation of quantaloids of closed cribles, Journal of Pure and Applied Algebra.
[Heymans et Stubbe, 2012b] Grothendieck quantales for allegories of enriched categories, Bulletin of the Belgian Mathematical Society.
[Joyal et Tierney, 1984] An extension of the Galois theory of Grothendieck, Memoirs of the American Mathematical Society.
[Johnstone, 2002] Sketches of an Elephant: A Topos Theory Compendium, Oxford University Press.
[Resende, 2007] Etale groupoids and their quantales, Advances in Mathematics.
[Shulman, 2012] Exact completion and small sheaves, Theory and Applications of Categories.
[Walters, 1982] Sheaves on sites as cauchy complete categories, Journal of Pure and Applied Algebra.

Prérequis :
Bonne connaissance de l'algèbre en général et de l'algèbre catégorique en particulier; de préférence aussi de l'expérience (par un cours ou un mémoire de maîtrise) avec la topologie algébrique, la géométrie algébrique, les ensembles ordonnés, la logique, etc.