EILCO : Analyse Numérique
Chapitre 3 : Résolution Numérique des Equations

H. Sadok

Plan

1. Introduction
   - Bibliographie
   - Introduction
2. Cas scalaire $p = 1$
   - Algorithmes de résolution
     - Méthode de dichotomie
     - Méthode de Newton
     - Méthode de la sécante
   - Etude de la convergence

Bibliographie

- Quarteroni, Alfio, Saleri, Fausto
  Calcul Scientifique Cours, exercices corrigés et illustrations en Matlab et Octave
  2006, XII, 319 p., Broché
  ISBN: 978-88-470-0487-0
- S. Guerre-Delabrière et M. Postel, «Méthodes d'approximation, Equations différentielles, Applications Scilab», Ellipses, Paris, 2004.

Position du problème

Le problème

$$
\begin{array}{l}
\text{Etant donné} \quad f : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^p, \\
\\
\text{On cherche un vecteur } \; x \in \mathbb{R}^n \; \text{ solution de } \quad f(x) = 0.
\end{array}
\tag{1}
$$

Nous allons d'abord traiter le cas scalaire. La fin de ce chapitre sera consacrée au cas vectoriel.

Résolution numérique des équations

Résoudre numériquement l'équation $f(x) = 0$, revient à chercher x^* tel que $|f(x^*)| \leq \epsilon$, avec ϵ très petit.
On va supposer dans la suite que la racine x^* est séparable, c'est à dire qu'il existe un intervalle $[a, b]$ tel que x^* est la seule racine dans cet intervalle.
On rappelle le théorème des valeures intermédiaires :

théorème des valeures intermédiaires

Soit f une fonction continue dans $[a, b]$, et soit $y \in [min(f(a), f(b)), max(f(a), f(b))]$, alors il existe $x \in [a, b]$ tel que $f(x) = y$.

supposons qu'il existe un intervalle $[a, b]$ tel que $f(a)f(b) < 0$, donc d'aprs le thérème des valeures intermédiaires, il existe un point $\bar{x}$ tel que $f(\bar{x}) = 0$.

Méthode de dichotomie

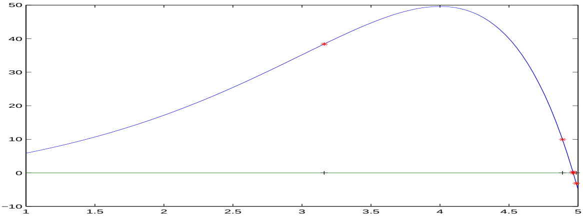
- Hypothèse : x^* est séparable dans $[a, b]$. Supposons de plus que $f(a)f(b) < 0$.

On définit l'algorithme suivant :

algorithme de la bissection

- Initialisation: $a_0 = a, b_0 = b$ avec $f(a)f(b) < 0$
- Iterations: Pour $k = 0, 1, 2, \ldots$
  - $c_k = \frac{a_k+b_k}{2}$,
  - Si $f(a_k)f(c_k) < 0$
    - alors $a_{k+1} = a_k$ et $b_{k+1} = c_k$
    - sinon $a_{k+1} = c_k$ et $b_{k+1} = b_k$
  - fin du si
- fin du pour

Méthode de dichotomie : Exemple $f(x) = (5 - x)e^x - 5 = 0$, avec $a = 1$ et $b = 6$



Méthode de dichotomie : Critère de convergence

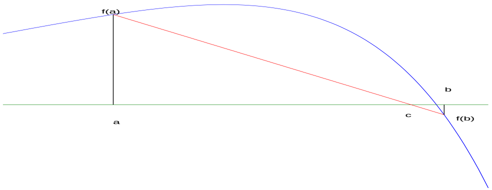
Il est évident que

$$b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n}.$$

Donc si $|b_n - a_n| \leq \epsilon$ alors $2^n \geq \frac{b-a}{\epsilon}$.
Et donc $n \geq \log_2 \left(\frac{b-a}{\epsilon}\right)$.
Si par exemple $a = 1$, $b = 2$ et $\epsilon = 10^{-4}$, alors $n \geq 14$. Ce qui montre que 14 itérations sont suffisante pour avoir une erreur inférieure à 10^{-4}.
Comme approximation on propose $\frac{a_n+b_n}{2}$. La convergence de la méthode de dichotomie est linéaire.
Cette méthode nécessite une seule évaluation de fonctions par itération. Nous allons voir dans ce qui suit une variante.

Méthode de dichotomie : Première variante

Au lieu de prendre c_n égal au milieu de $[a_n, b_n]$, nous allons tout d'abord tracer la droite passant par les deux points $(a_n, f(a_n))$ et $(b_n, f(b_n))$. Le nouveau point c_n sera donc l'intersection de cette droite avec l'axe Ox.



Méthode de dichotomie : Première variante

La droite passant par les points $(a_n, f(a_n))$ et $(b_n, f(b_n))$ a pour équation

$$y = f(a_n) + (x - a_n)\frac{f(b_n) - f(a_n)}{b_n - a_n}.$$

On en déduit donc que c_n est donné par

$$c_n = \frac{a_n f(b_n) - b_n f(a_n)}{f(b_n) - f(a_n)}.$$

En modifiant l'algorithme précédent on obtient :

Méthode de Regula-Falsi

- Hypothèse : x^* est séparable dans $[a, b]$. Supposons de plus que $f(a)f(b) < 0$.

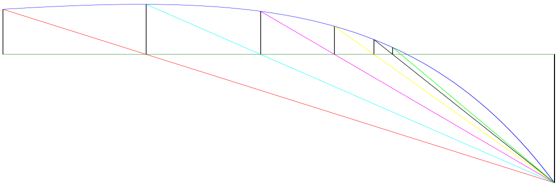
On définit l'algorithme suivant :

algorithme de la fausse position (Regula-Falsi)

- Initialisation: $a_0 = a, b_0 = b$ avec $f(a)f(b) < 0$
- Iterations: Pour $k = 0, 1, 2, \dots$
    - $c_k = \frac{a_k f(b_k) - b_k f(a_k)}{f(b_k) - f(a_k)}$,
    - Si $f(a_k)f(c_k) < 0$
        - alors $a_{k+1} = a_k$ et $b_{k+1} = c_k$
        - sinon $a_{k+1} = c_k$ et $b_{k+1} = b_k$
    - fin du si
- fin du pour

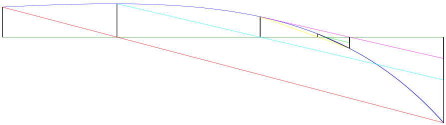
Interprétation de la Méthode de Regula-Falsi

Le principal inconvénient de cette méthode réside dans le fait que l'on peut avoir une stagnation de l'un des des points, comme le montre le graphe suivant :



Interprétation de la Méthode de Regula-Falsi Modifiée

Nous allons remédier à ce petit problème, en changeant l'ordonnée (on va le diviser par deux) du point qui cause la stagnation. Si on reprend la figure précédente on obtient maintenant :



Méthode de dichotomie (Seconde variante) : l'algorithme

Programme matlab

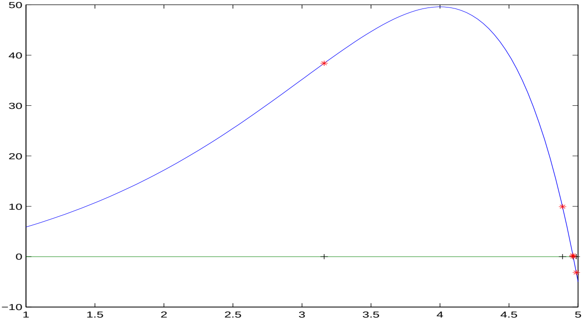
```
function [w,ier,N]=quest(f,a,b,xeps,feps,itermax)
fa=f(a);  fb=f(b);  w=a;  fw=fa;  a0=a;  b0=b;
for N=1 : itermax
        if(abs(a-b) < xeps)
                ier=0;  return
        end
        if ( abs(fw) <= feps)
                ier = 1;  return
        end
        w = (fa*b-fb*a)/(fa-fb);
        fwp=fw;  fw=f(w);
```

Méthode de dichotomie (Seconde variante) : l'algorithme (suite)

Programme matlab (suite)

```
        if fa*fw > 0
                a=w;  fa=fw;
                if( fw*fwp >0 )
                        fb = fb/2;
                end
                else
                b=w;  fb=fw;
                if( fw*fwp  > 0)
                        fa = fa/2;
                end
        end
end
ier = 2;
```

Méthode de dichotomie (Seconde variante) : Exemple $f(x) = (5-x)e^x - 5 = 0$, avec $a = 1$ et $b = 6$



Méthode de Newton

La méthode de Newton est basée sur le développement de Taylor. Soit x^* une solution de l'quation non linéaire $f(x) = 0$. Nous savons d'après la formule des rectangles à gauche que :

$$f(x^*) - f(x_k) = \int_{x_k}^{x^*} f'(t)dt = (x^* - x_k)\, f'(x_k) + \frac{(x^* - x_k)^2}{2} f''(\eta_k).$$

En notant que $f(x^*) = 0$ et en négligeant l'erreur de quadrature numérique on obtient la méthode de Newton:

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}.$$

Programmation de la méthode de Newton

Les paramètres d'entrée sont

- x_0 : approximation initiale,
- ε : tolérance souhaitée,
- *itemax* : nombre maximal d'itŕations

Algorithme

- Etant donnés un point initial x_0 et une tolérance ε,
- **Tant que** $|f(x_k)| > \varepsilon$ et $k \leq itemax$, **faire**

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)},$$

- **Fait**

Interprétation géométrique de la méthode de Newton

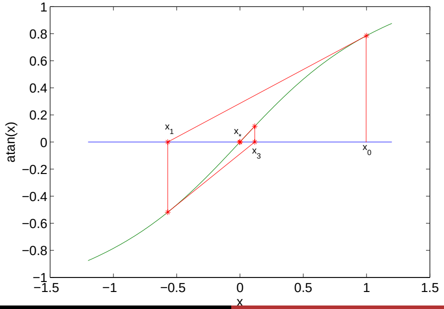
Prenons

$$f(x) = \arctan(x),$$

qui a pour solution exacte $x^* = 0$. L'itération de Newton pour cette fonction s'écrit sous la forme suivante:

$$x_{k+1} = x_k - (1 + x_k^2)\arctan(x_k).$$

En prenant $x_0 = 1$, on obtient :



Méthode de Newton : Remarques

- la fonction f doit être dérivable.
- x_{k+1} peut ne pas être calculable si $f'(x_k) = 0$ ou si x_k n'est pas dans le domaine de définition de f.
- chaque itération nécessite une évaluation de f et une évaluation de f'.
- cette méthode est souvent appelée aussi méthode de Newton-Raphson
- la méthode de Newton est une méthode de point fixe puisque x_{k+1} peut s'écrire sous la forme $x_{k+1} = g(x_k)$ avec

$$g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}.$$

Méthode de Newton : Exemple1

Soit a un nombre positif, pour calculer a^{-1}, nous allons appliquer la méthode de Newton à la fonction

$$f(x) = \frac{1}{x} - a.$$

L'itération de Newton pour cette fonction s'écrit sous la forme suivante:

$$x_{k+1} = 2x_k - ax_k^2.$$

En prenant $x_0 \in]0, \frac{1}{a}[$, on a les propriétés suivantes :

Méthode de Newton (Exemple1) : propriétés

- La suite $\{x_k\}$ est bien définie puisque $x_k \in]0, \frac{1}{a}[$
- $\{x_k\}$ est une suite croissante majorée par $\frac{1}{a}$, elle est donc convergente vers $\frac{1}{a}$
- $\{x_k\}$ est une suite de point fixe avec $x_{k+1} = 2x_k - ax_k^2 = g(x_k)$.
- Notons e_k l'erreur de la méthode i.e. $e_k = x_k - \frac{1}{a}$, il est facile de voir que

Convergence Quadratique

$$\frac{e_{k+1}}{e_k^2} = -a.$$

Méthode de Newton : Exemple2

Soit A un nombre positif, pour calculer $\sqrt{A}$, nous allons appliquer la méthode de Newton à la fonction

$$f(x) = x^2 - A.$$

L'itération de Newton pour cette fonction s'écrit sous la forme suivante:

$$x_{k+1} = \frac{1}{2}\left(x_k + \frac{A}{x_k}\right)$$

En prenant $x_0 \in]\sqrt{A}, \infty[$, on a les propriétés suivantes :

Méthode de Newton (Exemple2) : propriétés

- La suite $\{x_k\}$ est bien définie puisque $x_k \in]\sqrt{A}, \infty[$
- $\{x_k\}$ est une suite décroissante minorée par $\sqrt{A}$, elle est donc convergente.
- $\{x_k\}$ est une suite de point fixe avec $x_{k+1} = \frac{1}{2}\left(x_k + \frac{A}{x_k}\right)$, qui converge vers $\sqrt{A}$.
- Notons e_k l'erreur de la méthode i.e. $e_k = x_k - \sqrt{A}$, il est facile de voir que

Convergence Quadratique

$$\frac{e_{k+1}}{e_k^2} = \frac{1}{2x_k} \quad \text{et} \quad \lim_{k\to\infty} \frac{e_{k+1}}{e_k^2} = \frac{1}{2\sqrt{A}}$$

Méthode de la sécante : introduction

Bien que la méthode de Newton est très utilisée dans la pratique, son principal inconvénient vient du fait de l'utilisation à chaque itération de la dérivée. Quand la fonction f n'est pas définie explicitement, on n' pas toujours accés à sa dérivée. C'est pourquoi nous allons voir maintenant la méthode de la sécante qui n'utilise pas la dérivée de f.
L'idée de cette méthode est d'approcher la dérivde $f'(x_k)$ par une différence dévisée

$$f'(x_k) \approx [x_{k-1}, x_k] = \frac{f(x_k) - f(x_{k-1})}{x_k - x_{k-1}}.$$

Méthode de la sécante

L'itération de la méthode de la sécante s'écrit donc

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)(x_k - x_{k-1})}{f(x_k) - f(x_{k-1})}.$$

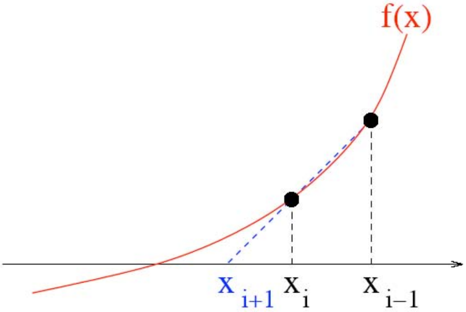
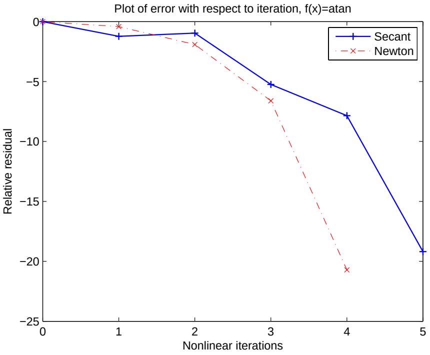


Figure : Interprétation géométrique de la méthode de la sécante.

Méthode de la sécante : Exemple

Appliquons la méthode de la sécante et la méthode de Newton pour trouver la racine de $f(x) = \arctan(x)$. Nous partons des itérés $x_0 = 1$ et $x_1 = 3$ pour la méthode de la sécante et $x_0 = 1$ pour la méthode de Newton.



Méthode de la sécante : Exemple1

$$f(x) = \frac{1}{x} - a.$$

L'itération de la sécante pour cette fonction s'écrit sous la forme suivante:

$$x_{k+1} = x_k + x_{k-1} - a x_k x_{k-1}.$$

En prenant x_0 et x_1 dans $]0, \frac{1}{a}[$, on a les propriétés suivantes :

- La suite $\{x_k\}$ est bien définie puisque $x_k \in]0, \frac{1}{a}[$
- Notons e_k l'erreur de la méthode i.e. $e_k = x_k - \frac{1}{a}$, il est facile de voir que

Convergence Super-linéaire

$$\frac{e_{k+1}}{e_k e_{k-1}} = -a.$$

Méthode de Newton : Exemple2

$$f(x) = x^2 - A.$$

L'itération de la sécante pour cette fonction s'écrit sous la forme suivante:

$$x_{k+1} = \frac{x_k x_{k-1} + A}{x_k + x_{k-1}}$$

Notons e_k l'erreur de la méthode i.e. $e_k = x_k - \sqrt{A}$, il est facile de voir que

Convergence Super-linéaire

$$\frac{e_{k+1}}{e_k e_{k-1}} = \frac{1}{2x_k} \quad \text{et} \quad \lim_{k \to \infty} \frac{e_{k+1}}{e_k e_{k-1}} = \frac{1}{2\sqrt{A}}$$

Définition

Soit $x_* \in \mathbb{R}^n$, $x_k \in \mathbb{R}^n$, $k = 1, 2, ...$ S'il existe une constante $c \in [0, 1)$ et un entier $k_0 \geq 0$ tels que pour tout $k \geq k_0$,

$$\| e_{k+1} \| \leq c \| e_k \|$$

alors la suite $\{x_k\}$ **converge linéairement** vers x_*. Si pour une suite $\{c_k\}$ qui tend vers 0,

$$\| e_{k+1} \| \leq c_k \| e_k \|,$$

pour tout k, alors la suite $\{x_k\}$ converge **super-linéairement** vers x_*. S'il existe des constantes $p > 1$, $c \geq 0$, et $k_0 \geq 0$ telles que $\{x_k\}$ converge vers x_* pour tout $k \geq k_0$,

$$\| e_{k+1} \| \leq c \| e_k \|^p,$$

alors la suite $\{x_k\}$ converge vers x_* avec **au moins un ordre** p. Si $p = 2$ ou $p = 3$, alors la convergence est dite respectivement **quadratique** ou **cubique**.

Etude de la convergence de la méthode de Newton

théoreme

Soit $f : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$, pour un ouvert $\mathcal{D}$ dans lequel $\| f'(y) - f'(z) \| \leq K \| y - z \|$ .. Supposons qu'il existe $\rho > 0$ tel que $|f'(x)| > \rho$ pour tout $x \in \mathcal{D}$. Si $f(x) = 0$ a une solution $x_* \in \mathcal{D}$, alors il existe une constante $\eta > 0$ telle que: si $|x_0 - x_*| < \eta$, alors la suite $\{x_k\}$ générée par

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}, \quad k = 0, 1, 2, ...$$

existe et converge vers x_*. En outre, pour $k = 0, 1, ...,$

$$|x_{k+1} - x_*| \leq \frac{K}{2\rho} |x_k - x_*|^2.$$

Etude de la convergence de la méthode de la sécante

théoreme

La méthode de la sécante a une convergence d'ordre $r = \frac{(1+\sqrt{5})}{2}$. En d'autres termes, nous avons

$$|x_{k+1} - x_*| \leq C|x_k - x_*|^r.$$