Intégration numérique

Prof. A. Quarteroni

Exemples et motivations

L'intégration est un des problèmes les plus importants que l'on rencontre en analyse. En effet, on rencontre souvent des intégrales dont le calcul par des méthodes analytiques est très compliqué ou même impossible, car il n'existe pas d'expression analytique de la primitive de la fonction à intégrer. Voici quelques exemples:

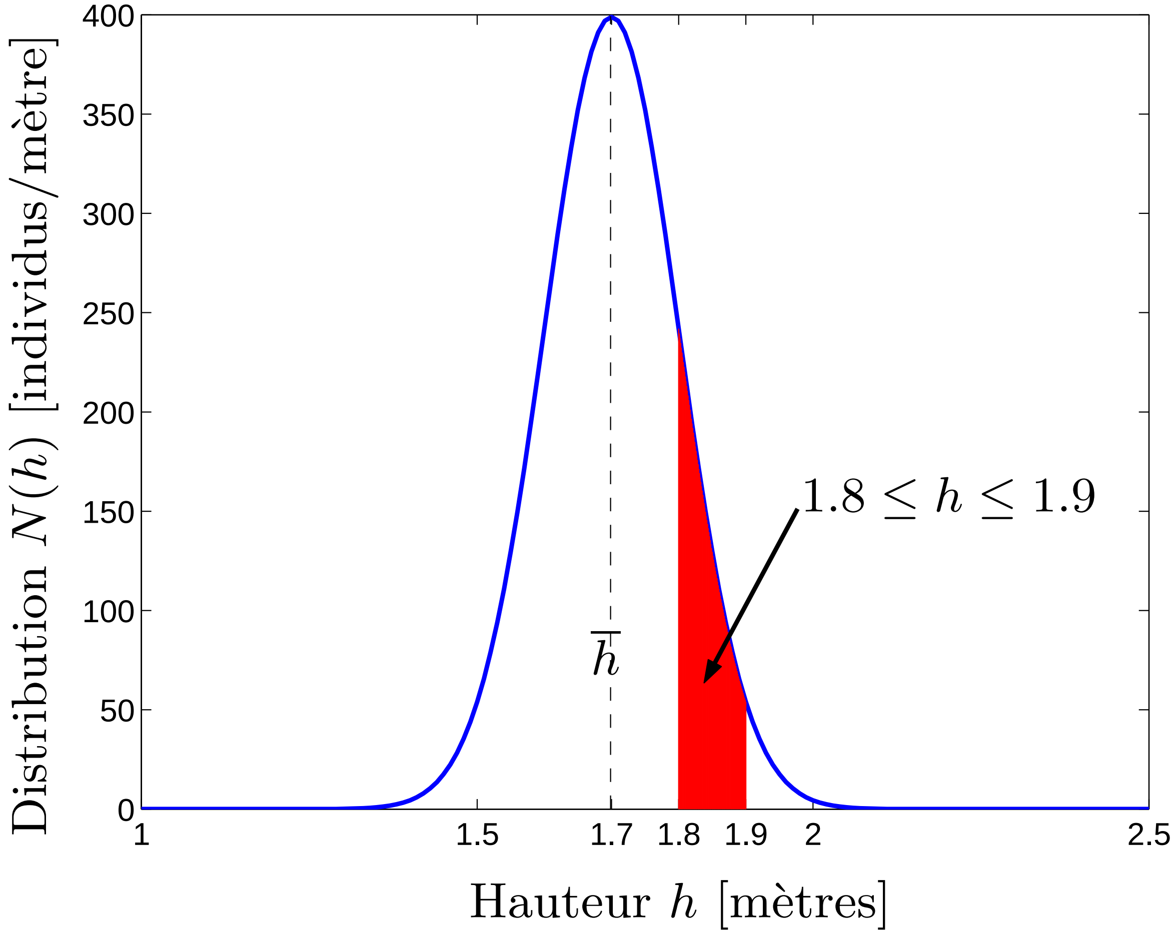
$$\int_0^1 e^{-x^2}\,dx, \qquad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1+\cos^2 x}\,dx, \qquad \int_0^1 \cos x^2\,dx.$$

Dans ces cas, on peut appliquer des méthodes numériques pour évaluer la valeur de l'intégrale donnée.

Exemple 1. Si on considère une très grande population de M individus et on mesure la hauteur de chaque sujet, la distribution $N(h)$ de ces donnés (telle que le nombre ΔN d'individus avec hauteur comprise entre h et $h + \Delta h$ soit $N(h)\Delta h$) peut être représentée par une fonction "cloche", définie par sa valeur moyenne $\overline{h}$ et sa déviation standard σ:

$$N(h) = \frac{M}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(h-\overline{h})^2}{2\sigma^2}\right).$$

Par exemple, dans le cas de la figure suivante ($M = 100$ individus, $\overline{h} = 1.7$ mètres, $\sigma = 0.1$ mètres), l'aire rouge représente le nombre d'individus qui ont une hauteur h comprise entre 1.8 et 1.9 mètres.



Formules d'intégration *simples*

(Sec. 4.2 du livre)

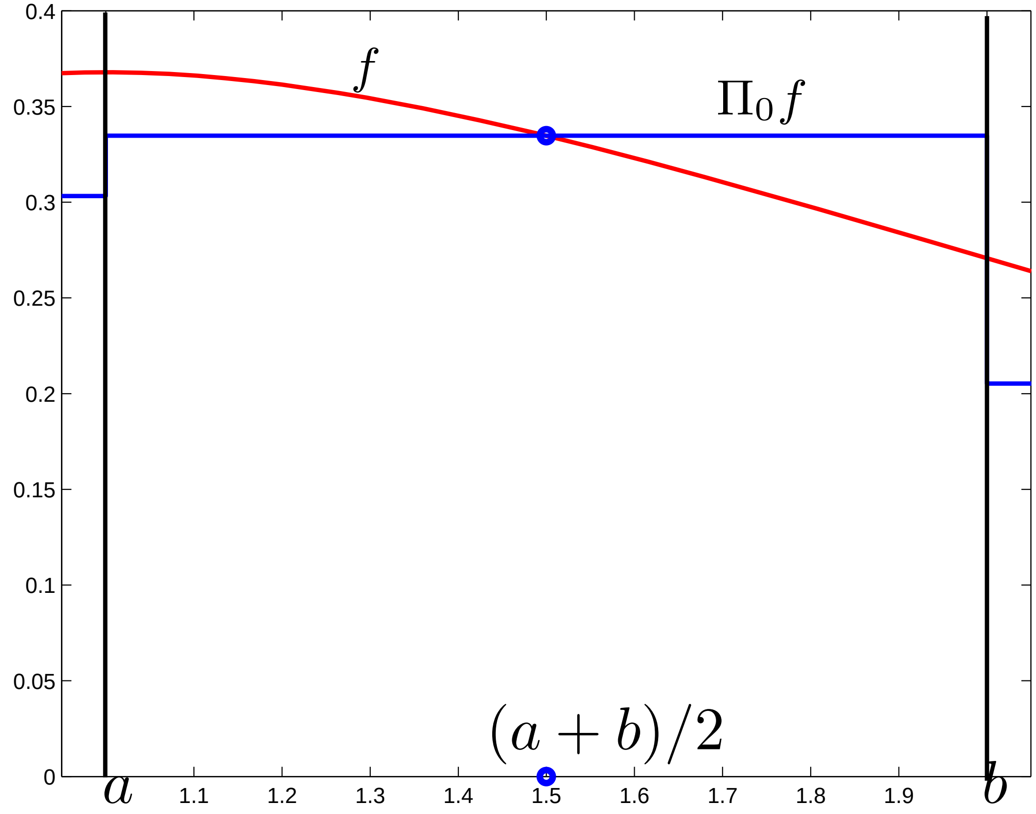
Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue donnée sur un intervalle $[a, b] \subset \mathbb{R}$. On se propose de calculer numériquement la quantité

$$I(f) = \int_a^b f(x)dx.$$

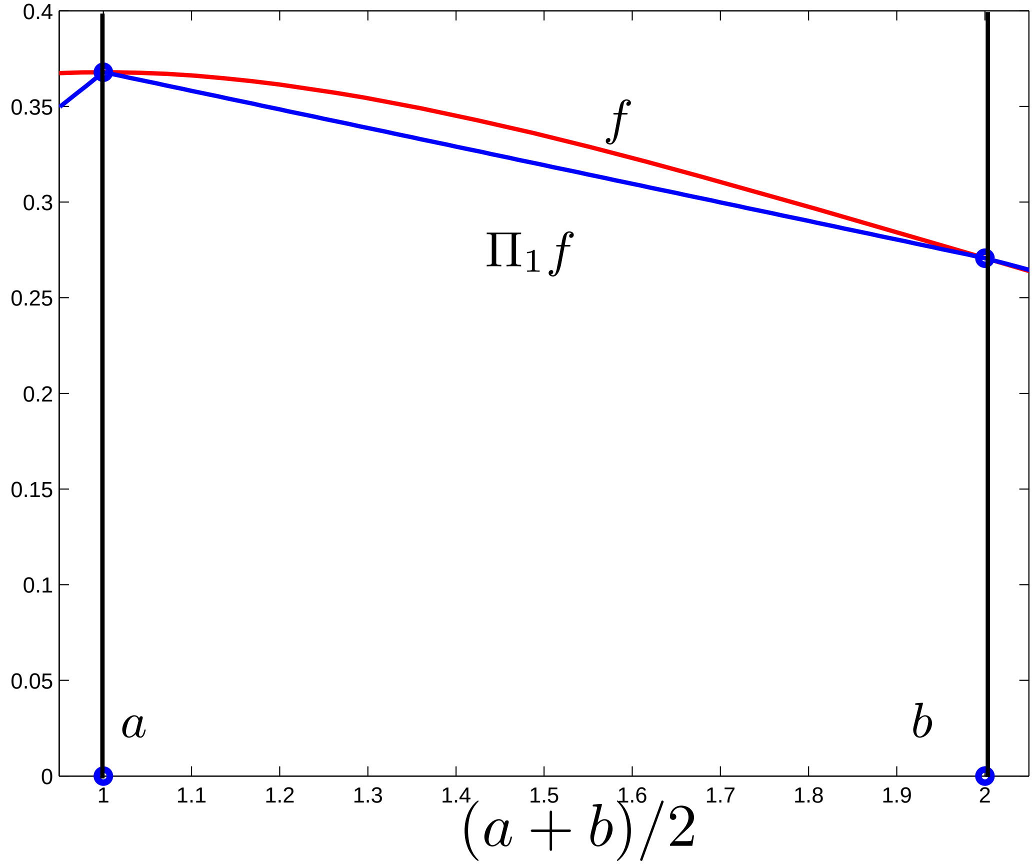
On considère les formules d'intégrations suivantes (dites *simples*):

- Formule du rectangle (ou point milieu):
$$\boxed{I_{pm}(f) = (b-a) f\left(\frac{a+b}{2}\right)} \tag{1}$$
- Formule des trapèzes:
$$\boxed{I_t(f) = (b-a)\frac{f(a)+f(b)}{2}} \tag{2}$$
- Formule de Simpson:
$$\boxed{I_s(f) = \frac{b-a}{6}\left[f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)\right]} \tag{3}$$

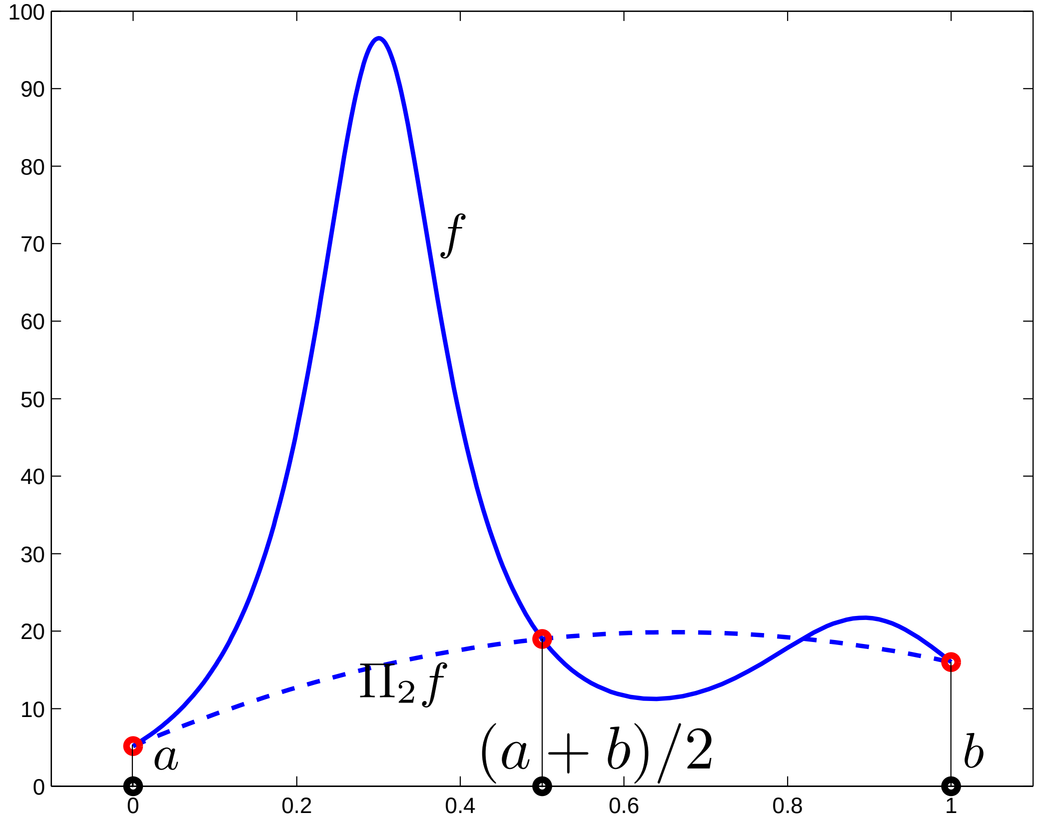
Formule du rectangle (ou point milieu)



Formule du trapèze



Formule de Simpson



Formules d'intégration *composites*

On va considerer les M sous-intervalles $I_k = [x_{k-1}, x_k]$, $k = 1, \ldots, M$, où $x_k = a + kH$ et $H = (b-a)/M$. Comme on a

$$I(f) = \sum_{k=1}^{M} \int_{I_k} f(x)dx,$$

sur chaque sous-intervalle I_k on peut calculer une approximation de l'intégrale exacte de f avec l'intégrale d'un polynôme $\overline{f}$ approchant f sur I_k, c.-à.d.:

$$I(f) \text{ approchée par } \sum_{k=1}^{M} \int_{I_k} \Pi_n f(x)dx = \int_a^b \Pi_n^H f(x)dx.$$

1. La formule composite du rectangle

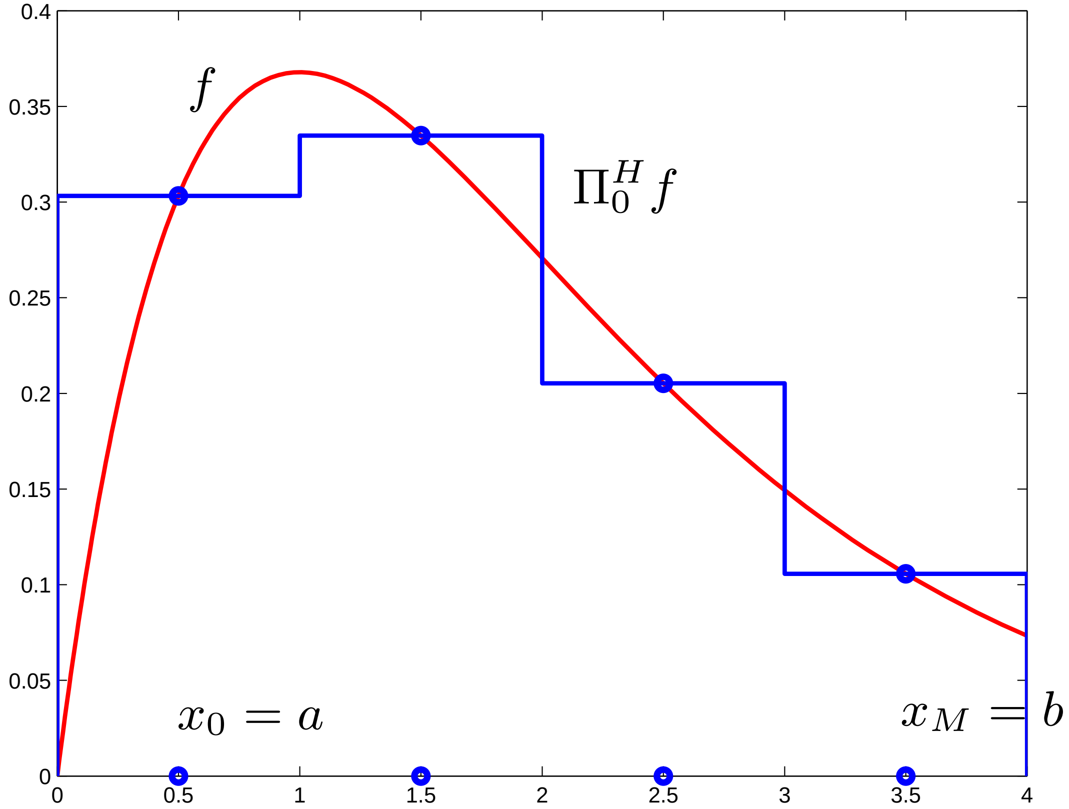
(ou du point milieu)

Cette formule est obtenue en remplaçant, sur chaque sous-intervalle I_k, la fonction f par un polynôme constant $\Pi_0 f$ égal à la valeur de f au milieu de I_k (voir figure suivante) : on obtient la *formule composite du rectangle (ou du point milieu)*

$$\boxed{I_{pm}^{c}(f) = H \sum_{k=1}^{M} f(\overline{x}_k),} \tag{4}$$

où

$$\overline{x}_k = \frac{x_{k-1} + x_k}{2}.$$

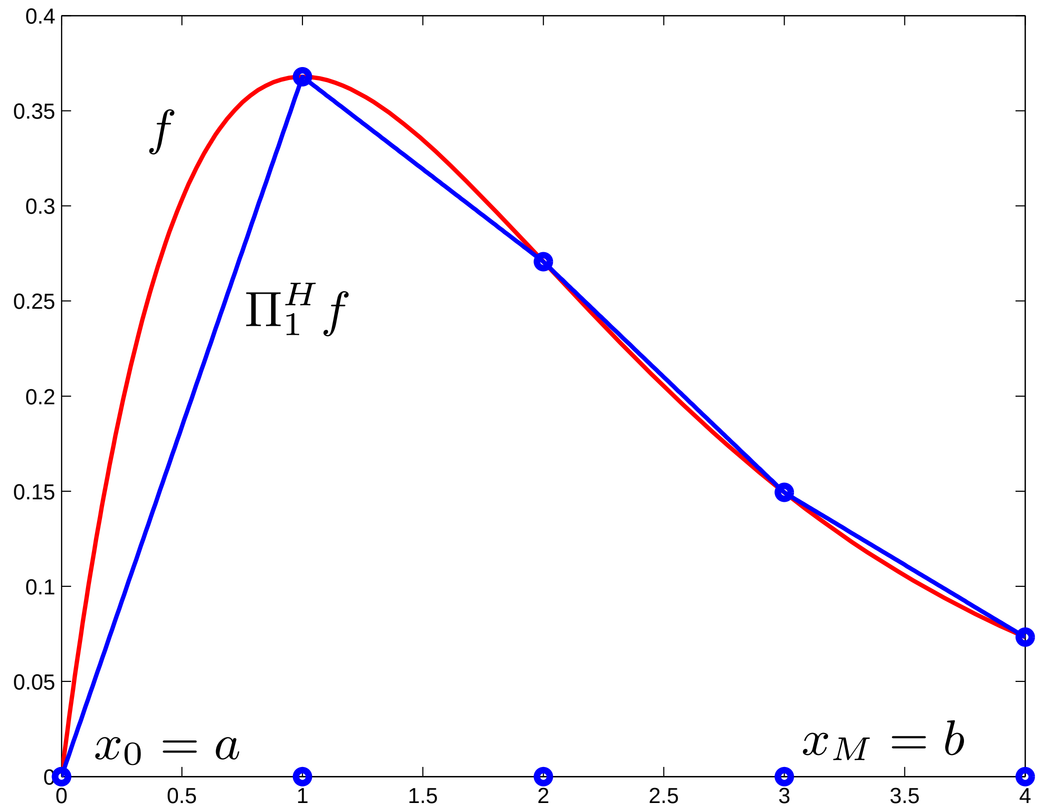


0.4
0.35
0.3
0.25
0.2
0.15
0.1
0.05
0
0
0.5
1
1.5
2
2.5
3
3.5
4
f
$\Pi_0^H f$
$x_0 = a$
$x_M = b$

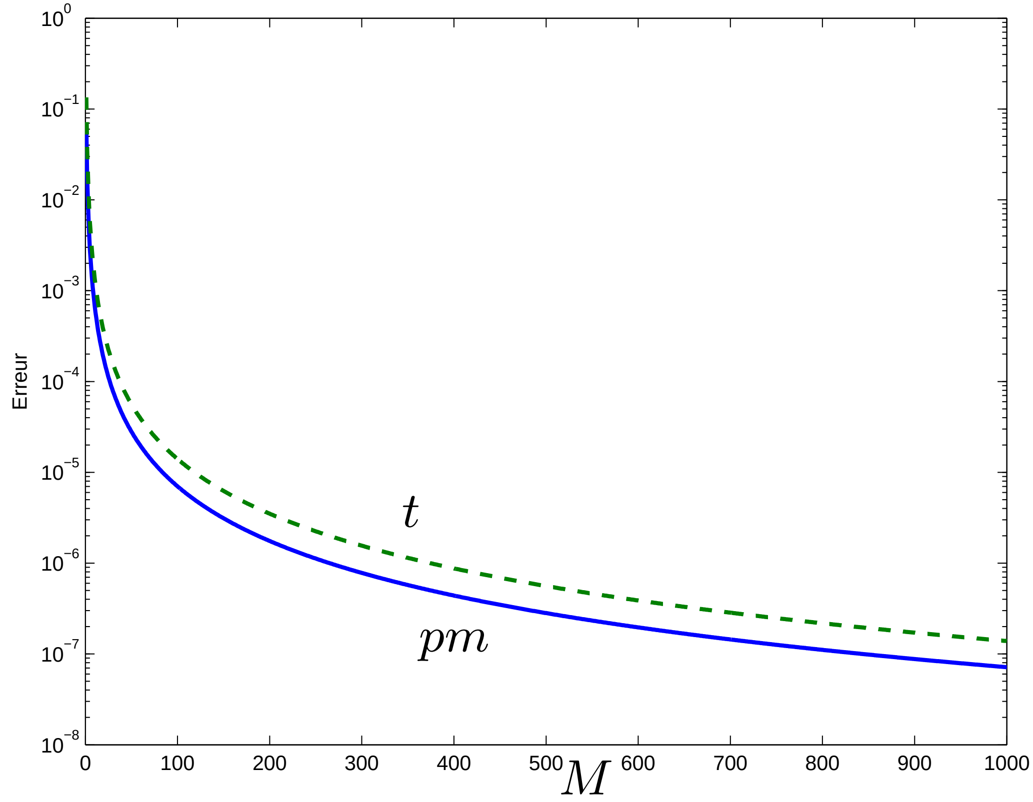
2. La formule du trapèze

Si sur chaque intervalle I_k on remplace f par le polynôme d'interpolation $\overline{f} = \Pi_1 f$ de degré 1 aux nœuds x_{k-1} et x_k, on obtient la *formule composite du trapèze*:

$$\boxed{I_t^c(f) = \frac{H}{2}\sum_{k=1}^{M}[f(x_k) + f(x_{k-1})] = \frac{H}{2}[f(a) + f(b)] + H\sum_{k=1}^{M-1} f(x_k).} \qquad (5)$$


0.4
0.35
0.3
0.25
0.2
0.15
0.1
0.05
0
0
0.5
1
1.5
2
2.5
3
3.5
4
f
$\Pi_1^H f$
$x_0 = a$
$x_M = b$

Exemple 2. On considère $I(f) = \int_0^1 f(x)dx$ où $f(x) = \cos(x^2)$: la figure suivante montre l'erreur d'intégration $|I_{pm}^c(f) - I(f)|$ (formule composite du rectangle) et $|I_t^c(f) - I(f)|$, (formule composite du trapèze) en fonction du nombre de sous-intervalles M.



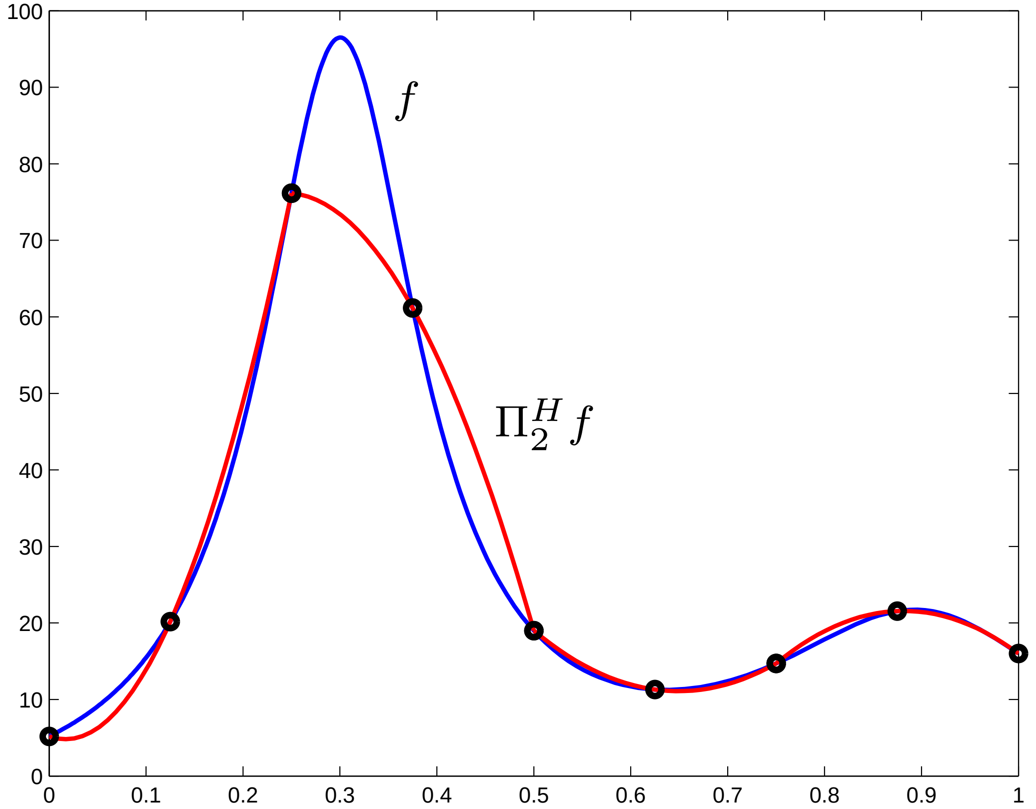
3. La formule de Simpson

La formule de Simpson est obtenue en remplaçant f par son polynôme interpolant composite $\overline{f} = \Pi_2^H$ de degré 2 entre les nœuds x_k. En particulier, $\overline{f}$ est une fonction continue par morceaux qui sur chaque sous-intervalle I_k est obtenue comme le polynôme interpolant f aux nœuds

$$x_{k-1},\ \overline{x}_k = \frac{x_{k-1}+x_k}{2} \text{ et } x_k \text{ (voir figure suivante).}$$

On obtient donc la *formule composite de Simpson*:

$$\boxed{I_s^c(f) = \frac{H}{6}\sum_{k=1}^{M}\left[f(x_{k-1}) + 4f(\overline{x}_k) + f(x_k)\right].} \qquad (6)$$



100
90
80
70
60
50
40
30
20
10
0
0
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5
0.6
0.7
0.8
0.9
1
f
$\Pi_2^H f$

Erreur d'intégration

- Formule composite du rectangle. Si f est dans $C^2([a,b])$, alors

$$|I(f) - I_{pm}^c(f)| \leq \frac{b-a}{24} H^2 \max_{x\in[a,b]} |f''(x)|$$

- Formule composite du trapèze. Si f est dans $C^2([a,b])$, alors

$$|I(f) - I_t^c(f)| \leq \frac{b-a}{12} H^2 \max_{x\in[a,b]} |f''(x)|$$

- Formule composite de Simpson. Si f est dans $C^4([a,b])$, alors

$$|I(f) - I_s^c(f)| \leq \frac{b-a}{180 \cdot 16} H^4 \max_{x\in[a,b]} |f''''(x)|$$

Démontrons l'estimation pour la formule du rectangle. D'abord, grâce à un développement de Taylor sur l'intervalle $I_k = [x_{k-1}, x_k]$ autour de $\bar{x}_k = (x_{k-1} + x_k)/2$, on a

$$\int_{I_k} [f(x) - f(\bar{x}_k)]\, dx = \int_{I_k} f'(\bar{x}_k)(x - \bar{x}_k) dx + \frac{1}{2} \int_{I_k} f''(\xi(x))(x - \bar{x}_k)^2 dx,$$

où $\xi(x) \in I_k$. D'autre part, on a

$$\int_{I_k} (x - \bar{x}_k) f'(\bar{x}_k) dx = 0,$$

et, par le theorème de la moyenne pour les intégrales, $\exists \xi_k \in I_k$:

$$\int_{I_k} f''(\xi(x))(x - \bar{x}_k)^2 dx = f''(\xi_k) \int_{I_k} (x - \bar{x}_k)^2 dx = \frac{H^3}{12} f''(\xi_k).$$

Donc:

$$\int_{I_k} [f(x) - f(\bar{x}_k)]\, dx = \frac{H^3}{24} f''(\xi_k).$$

Par conséquent, comme $\Pi_0^H f(x) = f(\bar{x}_k) \forall x \in I_k$, on déduit

$$|I(f) - I_{pm}^c(f)| = \left| \int_a^b \left[f(x) - \Pi_0^H f(x) \right] dx \right| = \left| \sum_{k=1}^{M} \int_{I_k} \left[f(x) - \Pi_0^H f(x) \right] dx \right|$$

$$= \left| \sum_{k=1}^{M} \int_{I_k} [f(x) - f(\bar{x}_k)]\, dx \right| \leq \sum_{k=1}^{M} \frac{H^3}{24} |f''(\xi_k)|.$$

Donc:

$$|I(f) - I_{pm}^c(f)| \leq \left(\sum_{k=1}^{M} \frac{H^3}{24} \right) \max_{x \in [a,b]} |f''(x)|$$

$$= M \frac{H^3}{24} \max_{x \in [a,b]} |f''(x)| = (b-a) \frac{H^2}{24} \max_{x \in [a,b]} |f''(x)|,$$

car $H = \frac{b-a}{M}$; c'est bien l'estimation qu'il fallait prouver.

Exemple. 1 (suite) Considérons l'exemple 1: supposons de vouloir calculer le nombre d'individus dont la hauteur soit comprise entre 1.8 et 1.9 mètres On peut utiliser par exemple la formule de Simpson composite avec 100 sous-intervalles (commande `simpsonc`):

```
>>N=inline('M/(sigma*sqrt(2*pi))*exp(-(h-hbar).^2./(2*sigma^2))',...
           'h','M','hbar','sigma')
N =
  Inline function:
  N(h,M,hbar,sigma)=M/(sigma*sqrt(2*pi))*exp(-(h-hbar).^2./(2*sigma^2))
>> M = 100; hbar = 1.7; sigma = 0.1;
>> int = simpsonc(1.8, 1.9, 100, N, M, hbar, sigma)
ans =
   13.5905
```

Donc on estime que le nombre d'individus avec $1.8 \leq h \leq 1.9$ soit le 13.6 %.

Définition 1. *Une formule de quadrature* $\tilde{I}$ *sur l'intervalle* $[a, b]$ *est exacte pour une fonction* f *si*

$$\tilde{I}(f) = \int_a^b f(x)dx.$$

Elle est ***exacte de degré*** $\mathbf{r}$ *si elle est exacte pour tout* f *polynôme de degré* r *i.e.*

$$\tilde{I}(f) = \int_a^b f(x)dx \quad \forall f \in \Pi_r,$$

mais non pour tous ceux de degré $r + 1$. *Alors* r *est appelé* degré d'exactitude *de la formule de quadrature.*

En prenant pour $\tilde{I}$ les formules simples du rectangle, des trapèzes et de Simpson, on peut associer un degré d'exactitude aux formules que l'on vient de traiter.
En particulier, on peut montrer que I_{pm} et I_t sont exactes de degré 1; la formule de Simpson est exacte de degré 3.

Remarque 1. *Les formules de quadrature simples considerées dans ce cours sont des cas particuliers de la formule plus générale suivante:*

$$\boxed{I_{approx}(f) = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k f(x_k),} \qquad (7)$$

où x_k sont les noeuds de la formule de quadrature, et α_k sont les poids (voir la table suivante).

Formule	*Dg. Exact.*	x_k	α_k
Rectangle (1)	1	$x_0 = \frac{1}{2}(a+b)$	$\alpha_0 = b - a$
Trapèzes (2)	1	$x_0 = a,\, x_1 = b$	$\alpha_0 = \alpha_1 = \frac{1}{2}(b-a)$
Simpson (3)	3	$x_0 = a,\, x_1 = \frac{1}{2}(a+b),$ $x_2 = b$	$\alpha_0 = \alpha_2 = \frac{1}{6}(b-a),$ $\alpha_1 = \frac{2}{3}(b-a)$

Formule Composite	*Dg. Exact.*	*Ordre par rapport à H*
Rectangle (4)	1	2
Trapèzes (5)	1	2
Simpson (6)	3	4