# EILCO : Analyse Numérique
# Chapitre 2 : Quadrature
H. Sadok

# Plan

# Bibliographie


- A. Quarteroni, R. Sacco et F. Saleri, «Méthodes Numériques pour le Calcul Scientifique », Springer-Verlag France, Paris, 2000.
- S. Guerre-Delabrière et M. Postel, «Méthodes d'approximation, Equations différentielles, Applications Scilab», Ellipses, Paris, 2004.
- M. Crouzeix et A. L. Mignot, « Analyse Numérique des Equations Différentielles », Masson, Paris, 1983.

# Introduction

On se propose de calculer l'integrale

$$I = \int_a^b f(x)dx \quad .$$

Lorsque $f(x) = e^{-x^2}$, on ne connait pas explicitement la valeur de $I$, c'est pourquoi nous allons l'approcher. L'idée de base est d'écrire $f(x) = p(x) + e(x)$ ou $p$ est un polynôme d'interpolation et d'integrer :

$$\int_a^b f(x)dx \quad = \int_a^b p(x)dx + \int_a^b e(x)dx.$$

# Méthodes élémentaires d'interpolation

Si $p_n$ est le polynôme d'interpolation, alors $p_n$ peut s'ecrire dans la base de Lagrange : $p_n(x) = \sum_{i=0}^{n} L_i(x) f(x_i)$. et donc

$$\int_a^b f(x)dx \;\; = \sum_{i=0}^{n} f(x_i) \int_a^b L_i(x)dx + E_Q(f) = \sum_{i=0}^{n} A_i \; f(x_i) + E_Q(f).$$

De plus l'expression de l'erreur est donnée par

## Expression de l'erreur

$E_Q(f) = \int_a^b \frac{1}{(n+1)!} \prod_{i=0}^{n} (x - x_i) \; f^{(n+1)}(\xi_x) dx = \int_a^b [x_0, \dots, x_n, x] \prod_{i=0}^{n} (x - x_i) \; dx$

# Remarques

Les coefficients $A_i$ sont déterminés de telle sorte que l'ereur de quadrature $E_Q(f)$ soit nulle lorsque $f \in E$, $E$ étant un ensemble de fonctions.

**définition**

On dira que la formule de quadrature

$$\int_a^b f(x)dx \ = \sum_{i=0}^{n} A_i \ f(x_i) \ + E_Q(f).$$

est exacte sur l'ensemble $E$ si et seulement si $E_Q(f) = 0, \forall f \in E$

- Dans la pratique $E$ est en général l'espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à $n$.
- $\sum_{i=0}^{n} A_i \ f(x_i)$ représente la valeur approchée de l'integrale.

# $n = 0$ et $x_0 = a$

On a donc

$$\int_a^b f(x)dx \quad = A_0\ f(a) + E_Q(f).$$

avec $E_Q(f) = 0, \forall f \in P_0$, ce qui veut dire que si $f(x) = 1, \forall x$, alors $E_Q(f) = 0$. Par conséquent $A_0 = b - a$, il nous reste à déterminer l'erreur $E_Q(f)$.

Nous savons que $E_Q(f) = \int_a^b (x-a)\ f'(\xi_x)dx$. Posons $u(x) = x - a \geq 0 \forall x \in [a, b]$ et $v(x) = f'(\xi_x)$ et appliquons la formule de la moyenne. Il existe alors $c \in ]a, b[$ tel que

**formule des rectangles à gauche**

$$\int_a^b f(x)dx \quad = (b-a)\ f(a) + \frac{(b-a)^2}{2} f'(c).$$

## $n = 0$ et $x_0 = b$

On a

$$\int_a^b f(x)dx \quad = A_0\, f(b) + E_Q(f).$$

avec $E_Q(f) = 0, \forall f \in P_0$, ce qui donne $A_0 = b - a$.
On a $E_Q(f) = \int_a^b (x - b)\, f'(\eta_x)dx$. Posons $u(x) = x - b \leq 0 \forall x \in [a, b]$ et $v(x) = f'(\eta_x)$ et appliquons la formule de la moyenne. Il existe alors $d \in ]a, b[$ tel que

**formule des rectangles à droite**

$$\int_a^b f(x)dx \quad = (b - a)\, f(b) - \frac{(b-a)^2}{2} f'(d).$$

## $n = 0$ et $x_0 = \frac{a+b}{2}$

On a donc

$$\int_a^b f(x)dx \quad = A_0 \, f(\frac{a+b}{2}) + E_Q(f). \tag{1}$$

avec $E_Q(f) = 0, \forall f \in P_0$, et donc $A_0 = b - a$.
Or $E_Q(f) = \int_a^b (x - \frac{a+b}{2}) \, f'(\xi_x)dx$. Cette fois, la fonction $x - \frac{a+b}{2}$ n'est plus de signe constant dans $[a, b]$ et on ne peut plus appliquer la formule de la moyenne directement. Nous allons voir maintenant deux facons de procéder :

# Première méthode de détermination de l'erreur

Or

$$\int_a^b x\,dx = \frac{b^2 - a^2}{2} = (b-a)\,\frac{a+b}{2},$$

Ce qui implique que la formule de quadrature (1) est exacte sur $P_1$( $E_Q(f) = 0, \forall f \in P_1$)

## $n = 0$ et $x_0 = \frac{a+b}{2}$ (suite)

Posons $p$ le polyôme d'interpolation de degré un, tel que

$$p(\frac{a+b}{2}) = f(\frac{a+b}{2}) \quad \text{et} \quad p'(\frac{a+b}{2}) = f'(\frac{a+b}{2}).$$

Nous avons donc

$$p(t) = f(\frac{a+b}{2}) + (t - \frac{a+b}{2})f'(\frac{a+b}{2}),$$

et

$$f(t) - p(t) = (t - \frac{a+b}{2})^2 \frac{f''(\eta_t)}{2}$$

et

$$\int_a^b p(t)dt = (b-a)\, f(\frac{a+b}{2})$$

# Formule du point milieu

On en déduit que

$$\int_a^b f(t)\,dt = \int_a^b p(t)\,dt + \int_a^b (t - \frac{a+b}{2})^2\, \frac{f''(\eta_t)}{2}\,dt$$

Comme la fonction $u(t) = (t - \frac{a+b}{2})^2 \geq 0 \forall t \in ]a, b[$, on applique la formule de la moyenne et on sait donc qu'il existe alors $e \in ]a, b[$ tel que

**formule du point milieu**

$$\int_a^b f(x)dx \;= (b-a)\, f(\frac{a+b}{2}) + \frac{(b-a)^3}{24} f''(e).$$

# Deuxième méthode de détermination de l'erreur

On remarque que l'erreur peut être donnée par la formule de Cauchy suivante

$$E_Q(f) = \int_a^b (x - x_0)\, [x_0, x]dx$$

Or $[x_0, x_0, x] = \frac{[x_0,x]-[x_0,x_0]}{x-x_0}$. On en déduit que $[x_0, x] = [x_0, x_0] + [x_0, x_0, x]\,(x - x_0)$. Ce qui donne

$$E_Q(f) = \int_a^b (x - x_0)\, [x_0, x_0]dx + \int_a^b (x - x_0)^2\, [x_0, x_0, x]dx.$$

Mais $\int_a^b (x - x_0)\, dx = 0$ Et donc par utilsation de la formule de la moyenne et du fait que $(x - x_0)^2 \geq 0, \forall x \in [a, b]$, on obtient l'expression de $E_Q(f)$.

## $n = 1$, $x_0 = a$ et $x_1 = b$

La formule de quadrature devient donc :

$$\int_a^b f(x)dx \quad = A_0 \ f(a) + A_1 \ f(b) + E_Q(f)$$

et l'erreur de quadrature est donc

$$E_Q(f) = \int_a^b \frac{(x-a)(x-b)}{2} f''(\xi_x)dx.$$

Afin de simplifier les calculs nous allons utiliser le changement de variables suivant

# Changement de variables

Posons $x = a + t(b-a)$, donc $dx = (b-a)\, dt$ et on obtient

$$\int_a^b f(x)dx \;= (b-a)\int_0^1 f(a+t(b-a))dt = (b-a)\int_0^1 g(t)dt,$$

ou nous avons posé

$$g(t) = f(a+t(b-a))$$

et donc

$$g'(t) = (b-a)f'(a+t(b-a))$$
$$g''(t) = (b-a)^2 f''(a+t(b-a)).$$

Nous allons obtenir les formules de Quadrature pour la fonction $g$ sur $[0,1]$, puis nous allons déduire les formules pour $f$.

# Formule des Trapèzes pour $g$

La formule de quadrature devient donc :

$$\int_0^1 g(t)dt \;\; = B_0\, g(0) + B_1\, g(1) + E_Q(g)$$

et l'erreur de quadrature est donc

$$E_Q(g) = \int_0^1 \frac{t(t-1)}{2} g''(\theta_t)dt.$$

Cette formule étant exacte sur $P_1$, nous en déduisons donc que :

- Si $g(t) = 1, \forall t \in [0,1]$ alors, $\int_0^1 dt \;\; = 1 = B_0 + B_1$
- Si $g(t) = t, \forall t \in [0,1]$ alors, $\int_0^1 tdt \;\; = \frac{1}{2} = B_1$

# Formule des Trapèzes pour $f$

En ce qui concerne l'erreur de quadrature pour $g$. L'utilisation de la formule de la moyenne du fait que $t(t-1) \leq 0, \forall t \in [0,1]$ nous permet de dire qu'il existe $\mu \in [0,1]$ tel que $E_Q(g) = \int_0^1 \frac{t(t-1)}{2} g''(\theta_t)dt = \frac{g''(\mu)}{2} \int_0^1 t(t-1)dt = -\frac{g''(\mu)}{12}$. La formule de quadrature devient donc :

$$\int_0^1 g(t)dt \quad = \frac{1}{2}\, g(0) + \frac{1}{2}\, g(1) - \frac{g''(\mu)}{12}$$

Ce qui nous permet de déduire la formule des trapèzes pour $f$. Il existe $s \in [a,b]$ tel que

## méthode des Trapèzes

$$\int_a^b f(x)dx \quad = \frac{b-a}{2}\,(f(a)+f(b)) - \frac{(b-a)^3}{12}\, f''(s)$$

## $n = 2$, $x_0 = a$ $x_1 = \frac{a+b}{2}$ et $x_2 = b$

La formule de quadrature est donc :

$$\int_a^b f(x)dx \;\; = A_0\, f(a) + A_1\, f(\frac{a+b}{2}) + A_2\, f(b)\, + E_Q(f)$$

avec

$$E_Q(f) = \int_a^b \frac{(x-a)(x-\frac{a+b}{2})(x-b)}{6} f'''(\xi_x)dx.$$

# Formule de Simpson pour $g$

Nous allons procéder comme pour la méthode des Trapèzes, en utilisant le même changement de variable $x = a + t(b - a)$

$$\int_0^1 g(t)dt \quad = B_0\, g(0) + B_1\, g(\frac{1}{2}) + B_2\, g(1) \, + E_Q(g)$$

et l'erreur de quadrature est donc

$$E_Q(g) = \int_0^1 \frac{t(t-1)(t-\frac{1}{2})}{6} g'''(\theta_t)dt.$$

Cette formule étant exacte sur $P_2$, on a :

- Si $g(t) = 1, \forall t \in [0,1]$ alors, $\int_0^1 dt \quad = 1 = B_0 + B_1 + B_2$
- Si $g(t) = t, \forall t \in [0,1]$ alors, $\int_0^1 tdt \quad = \frac{1}{2} = \frac{1}{2}B_1 + B_2$
- Si $g(t) = t^2, \forall t \in [0,1]$ alors, $\int_0^1 t^2dt \quad = \frac{1}{3} = \frac{1}{4}B_1 + B_2$

# Formule de Simpson pour $f$

En résolvant ce système linéaire on obtient

$$B_0 = B_2 = \frac{1}{6} \quad \text{et} \quad B_1 = \frac{4}{6}$$

$$\int_0^1 g(t)dt \;= \frac{1}{6}\, g(0) + \frac{4}{6}\, g(\frac{1}{2}) + \frac{1}{6}\, g(1) \,+ E_Q(g)$$

- **Remarque** Si $g(t) = t^3, \forall t \in [0, 1]$ alors, $E_Q(g) = 0$, ce qui implique que la formule de Quadrature est exacte sur $P_3$.

# Erreur de Quadrature

En ce qui concerne l'erreur nous allons utiliser la formule de Cauchy :

$$E_Q(g) = \int_0^1 t(t - \tfrac{1}{2})(t-1)\,[y_0, y_1, y_2, t]dt$$

avec $y_0 = 0$, $y_1 = \frac{1}{2}$ et $y_2 = 1$.
$[y_1, y_0, y_1, y_2, t] = \frac{[y_0, y_1, y_2, t] - [y_1, y_0, y_1, y_2]}{t - y_1}$. Donc
$[y_0, y_1, y_2, t] = [y_1, y_0, y_1, y_2] + [y_1, y_0, y_1, y_2, t]\,(t - y_1)$. Ce qui donne

$$E_Q(g) = \int_0^1 t(t - \tfrac{1}{2})(t-1)\,[y_1, y_0, y_1, y_2]dt + \int_0^1 t(t - \tfrac{1}{2})^2(t - 1)\,[y_1, y_0, y_1, y_2, t]dt.$$

# Erreur de Quadrature : suite

Or $[y_1, y_0, y_1, y_2]$ est indépendante de $t$ et
$\int_0^1 t(t-\frac{1}{2})(t-1)dt = 0$

$$E_Q(g) = \int_0^1 t(t-\frac{1}{2})^2(t-1)\,[y_1, y_0, y_1, y_2, t]dt.$$

De plus $t(t-\frac{1}{2})^2(t-1) \leq 0, \forall t \in [0,1]$, on donc en utilisant la formule de la moyenne, le théorème de Cauchy et le fait que $\int_0^1 t(t-\frac{1}{2})^2(t-1)\,dt = \frac{-1}{120}$, on obtient

## Formule de Simpson

$$\int_a^b f(x)dx \quad = \frac{b-a}{6}\,(f(a)+4f(\frac{a+b}{2})+f(b)) - \frac{(b-a)^5}{2880}\,f^{(4)}(z)$$

# Formulation générale

Dans les méthodes composites, l'intervalle d'integration , $J = [a, b]$, est divisé en $n$ sous intervalles, $J_k = [x_k, x_{k+1}]$, ou $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$. Si l'intervalle $J_k$ est suffisament petit, on utilise des formules élémentaires de quadrature sur $J_k$.

$$I_k = \int_{J_k} f(x)dx = \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x)dx$$

en utilisant très peu d'évaluations de $f$ dans $J_k$.

**formules composites**

$$I = \int_a^b f(x)\, dx = \sum_{k=1}^{n} \int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x)dx$$

on suppose dans la suite du paragraphe que les abscisses sont équidistantes $x_i = a + ih$, pour $i = 0, \ldots, n$

# Méthode Composite des rectangles à gauche

On utilise comme formule élémentaire la formule des rectangles à gauche

$$\int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x)dx \ = (x_k - x_{k-1})\, f(x_{k-1}) + \frac{(x_k - x_{k-1})^2}{2} f'(c_i).$$

$$\int_a^b f(x)\,dx \ = h[f(a){+}f(a{+}h){+}\ldots{+}f(a{+}(n{-}1)h)]{+}\frac{h^2}{2}\sum_{k=1}^{n} f'(c_i).$$

En écrivant $h = \frac{(b-a)}{n}$ et en utilsant le fait que $\frac{\sum_{k=1}^{n} f'(c_i)}{n} = f'(c)$, on obtient

## Méthode Composite des rectangles à gauche

$$\int_a^b f(x)\,dx \ = h[f(a){+}f(a{+}h){+}\ldots{+}f(a{+}(n{-}1)h)]{+}\frac{h(b-a)}{2} f'(c).$$

# Méthode Composite des points milieux

On utilise comme formule élémentaire du point milieu

$$\int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x)dx = \frac{(x_k - x_{k-1})}{2} f(x_{k-1} + \frac{(x_k - x_{k-1})}{2}) + \frac{(x_k - x_{k-1})^2}{24} f''(c_i)$$

On obtient la formule suivante

## Méthode Composite des points milieux

$$\int_a^b f(x)\,dx = h[f(a+\frac{h}{2})+f(a+3\frac{h}{2})+\ldots+f(a+(n-\frac{1}{2})h)]+E_Q(f).$$

avec

$$E_Q(f) = \frac{h^2(b-a)}{24} f''(d).$$

# Méthode Composite des Trapèzes

On utilise comme formule élémentaire la formule des Trapèzes
$\int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x)dx = \frac{x_k - x_{k-1}}{2}\left[f(x_{k-1}) + f(x_k)\right] - \frac{(x_k - x_{k-1})^3}{12} f^{(2)}(d_i).$
Et on obtient avec la même technique

## Méthode Composite des Trapèzes

$\int_a^b f(x)\,dx =$
$\frac{h}{2}[f(a)+2f(a+h)+2f(a+2h)+\ldots+2f(a+(n-1)h)+f(b)]+E_Q(f).$
avec $E_Q(f) = -\frac{h^2(b-a)}{12} f^{(2)}(d)$

# Méthode Composite de Simpson

On utilise comme formule élémentaire la formule de Simpson
$\int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x)dx = \frac{x_k - x_{k-1}}{6}\left[f(x_{k-1}) + 4f\left(\frac{x_{k-1}+x_k}{2}\right) + f(x_k)\right] - \frac{(x_k - x_{k-1})^5}{2880} f^{(4)}(z_i)$.
Et on obtient avec la même technique

## Méthode Composite de Simpson

$\int_a^b f(x)\,dx = \frac{h}{6}[f(a) + 4f(a+\frac{h}{2}) + 2f(a+h) + \ldots + 2f(a+(n-1)h) + 4f(a+(n-\frac{1}{2})h) + f(b)] + E_Q(f)$. avec
$E_Q(f) = -\frac{h^4(b-a)}{2880} f^{(4)}(z)$

# Méthode de Gauss

Dans les méthodes vues auparavant les abscisses étaient fixées. Nous allons dans cette section chercher les abscisses pour que la méthode de quadrature soit exacte sur l'espace des polynomes de degré le plus élevé possible.

$$\int_a^b f(x)dx \;= \sum_{i=0}^{n} A_i\, f(x_i) \,+ E_Q(f).$$

- $n = 0$

La formule de quadrature que l'on cherche a la forme suivante :

$$\int_a^b f(x)dx \;= A_0\, f(x_0) \,+ E_Q(f).$$

et maintenant nous avons deux inconnues $A_0$ et $x_0$.

# Exemple de construction de la méthode de Gauss

- Si $f(x) = 1, \forall x \in [a, b]$ alors, $\int_a^b dx \quad = (b - a) = A_0$
- Si $f(x) = x, \forall x \in [a, b]$ alors, $\int_a^b xdx \quad = \frac{b^2}{2} - \frac{a^2}{2} = A_0 x_0$

On obtient donc $A_0 = (b - a)$ et $x_0 = \frac{a+b}{2}$, et on retrouve la formule du point milieu

**formule du point milieu**

$$\int_a^b f(x)dx \quad = (b - a)\, f(\frac{a+b}{2}) + \frac{(b-a)^3}{24} f''(e).$$

# Autre Exemple de construction de la méthode de Gauss

- $n = 1$

La formule de quadrature que l'on cherche a la forme suivante :

$$\int_a^b f(x)dx \quad = A_0 \; f(x_0) + A_1 \; f(x_1) \; + E_Q(f).$$

et maintenant nous avons quatre inconnues $A_0$, $A_1$, $x_0$ et $x_1$. Nous allons faire les calculs pour la fonction $g$ sur l'intervalle $[0, 1]$. On a une formule sous la forme :

$$\int_0^1 g(t)dt \quad = B_0 \; g(y_0) + B_1 \; g(y_1) \; + E_Q(g).$$

ou les inconnues sont $B_0$, $B_1$, $y_0$ et $y_1$

# Autre Exemple $n = 1$ suite

Pour que cette formule soit exacte sur $P_3$, on doit avoir :

- Si $g(t) = 1, \forall t \in [0,1]$ alors, $\int_0^1 dt \quad = 1 = B_0 + B_1$
- Si $g(t) = t, \forall t \in [0,1]$ alors, $\int_0^1 tdt \quad = \frac{1}{2} = B_0 y_0 + B_1 y_1$
- Si $g(t) = t^2, \forall t \in [0,1]$ alors, $\int_0^1 t^2 dt \quad = \frac{1}{3} = B_0 y_0^2 + B_1 y_1^2$
- Si $g(t) = t^3, \forall t \in [0,1]$ alors, $\int_0^1 t^3 dt \quad = \frac{1}{4} = B_0 y_0^3 + B_1 y_1^3$

On a donc un système de 4 équations non linéaires a 4 inconnues. Pour le résoudre nous allons multiplier chaque équation par $y_0$ et nous allons la retrancher de la suivante. On obtient

# Autre Exemple $n = 1$ suite

$$
\begin{aligned}
B_1(y_1 - y_0) &= \frac{1}{2} - y_0 \\
B_1 y_1(y_1 - y_0) &= \frac{1}{3} - \frac{y_0}{2} \\
B_1 y_1^2(y_1 - y_0) &= \frac{1}{4} - \frac{y_0}{3}
\end{aligned}
$$

On déduit donc que

$$
y_1 = \frac{\frac{1}{3} - \frac{y_0}{2}}{\frac{1}{2} - y_0} = \frac{\frac{1}{4} - \frac{y_0}{3}}{\frac{1}{3} - \frac{y_0}{2}}.
$$

Et finalment $y_0$ et $y_1$ sont solution de l'équation du second degré suivante

$$
x^2 - x + \frac{1}{6} = 0.
$$

# Autre Exemple $n = 1$ suite

Et donc $y_0 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{6}$, $y_1 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{6}$ et $B_0 = B_1 = \frac{1}{2}$. On a donc obtenu la formule suivante :

$$\int_0^1 g(t)dt \ = \frac{1}{2}(g(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{6}) + g(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{6})) + E_Q(g).$$

Il nous reste à déterminer l'erreur $E_Q(g)$

# Détermination de l'erreur $n = 1$ $E_Q(g)$

Posons $p$ le polyôme d'interpolation de degré trois, tel que

$$p(y_0) = g(y_0) \quad \text{et} \quad p'(y_0) = g'(y_0).$$

$$p(y_1) = g(y_1) \quad \text{et} \quad p'(y_1) = g'(y_1).$$

Nous avons donc

$$g(t) - p(t) = (t - y_0)^2 \, (t - y_1)^2 \, \frac{g^{(4)}(\eta_t)}{24}$$

En intégrant, on obtient :

$$\int_0^1 g(t)dt \; = \int_0^1 p(t)dt \; + \int_0^1 (t - y_0)^2 \, (t - y_1)^2 \, \frac{g^{(4)}(\eta_t)}{24} dt$$

# Détermination de l'erreur $E_Q(g)$

Comme $p$ est un polyôme de degré trois, on a donc

$$\int_0^1 p(t)dt = \frac{1}{2}(p(y_0) + p(y_1)) = \frac{1}{2}(g(y_0) + g(y_1)).$$

D'autre part, en utilsant la formule de la moyenne, on sait qu'il exite $\eta \in ]0,1[$ tel que

$$E_Q(g) = \frac{g^{(4)}(\eta)}{24} \int_0^1 (t-y_0)^2 (t-y_1)^2 \, dt = \frac{g^{(4)}(\eta)}{24} \int_0^1 (t^2-t+\frac{1}{6})^2 \, dt$$

En intégrant, on obtient :

$$\int_0^1 g(t)dt = \frac{1}{2}\left(g(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{6}) + g(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{6})\right) + \frac{g^{(4)}(\eta)}{4320}$$

# Formule de Gauss $n = 1$

## Formule de Gauss $n = 1$

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{b-a}{2}\left(f(a+y_0(b-a)) + f(a+y_1(b-a))\right) + E_Q(f)$$

avec

$$y_0 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{6},\ y_1 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{6}$$

et

$$E_Q(f) = \frac{f^{(4)}(e)}{4320}(b-a)^5$$

# Définition de la formule de quadrature de Gauss

On considère les integrales de type

$$\int_a^b f(x)\, w(x)\, dx$$

où $w(x) > 0, \forall x \in ]a, b[$, $w$ est intégrable sur $]a, b[$ ($a$ et $b$ peuvent être infinis). La méthode de Gauss consiste à déterminer les coéfficients $A_i$ et les noeuds $x_i$ de telle facon que la méthode de Quadrature

$$\int_a^b f(x) w(x)\, dx = \sum_{i=0}^{n} A_i\, f(x_i) + E_Q(f). \tag{2}$$

soit exacte sur $P_{2n+1}$.
Il faut remarquer que les coéfficients $A_i$ et les noeuds $x_i$ dépendent de $n$ c'est pourquoi on les note en général $A_i^{(n)}$ et $x_i^{(n)}$.

# Théorème de caractérisation

Posons $\Pi_n(x) = \prod_{i=0}^{n}(x - x_i)$

**Théorème**

La formule de quadrature (47) est exacte sur $P_{2n+1}$, si et seulement si

$$\int_a^b \Pi_n(x)x^p\, w(x)\, dx \quad = 0, \quad \text{pour} \quad p \in \{0, 1, \ldots, n\}.$$

On dit que la suite $\{\Pi_n\}$ est une suite de polynômes orthogonaux pour le poids $w$ dans l'intervalle $[a, b]$.

- Les formules de quadrature de Gauss à $n$ points ne sont pas exactes sur $P_{2n+2}$.

# Exemple 1

- $n = 1, w(x) = 1$ et $[a, b] = [0, 1]$.

D'après le théorème de caractérisation, nous avons

$$\int_0^1 (x - x_0)(x - x_1)\, dx \quad = 0 \quad \text{et} \quad \int_0^1 (x - x_0)(x - x_1)\, x\, dx \quad = 0.$$

0n obtient donc le système linéaire

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}S - P &= \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3}S - \frac{1}{2}P &= \frac{1}{4} \end{aligned}$$

où $S = x_0 + x_1$ et $P = x_0 x_1$. Et on retrouve le fait que $x_0$ et $x_1$ sont les deux racines de l'équation $x^2 - x + \frac{1}{6} = 0$.

# Exemple 2

- $n = 1, w(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ et $[a, b] = [-1, 1]$.

D'après le théorème de caractérisation, nous avons

$$\int_{-1}^{1} \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{\sqrt{1-x^2}} dx = 0 \quad \text{et} \quad \int_{-1}^{1} \frac{(x-x_0)(x-x_1)\, x}{\sqrt{1-x^2}} dx = 0.$$

Or $\int_{-1}^{1} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx = 0$, $\int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \pi$, $\int_{-1}^{1} \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} dx = \frac{\pi}{2}$
et $\int_{-1}^{1} \frac{x^3}{\sqrt{1-x^2}} dx = 0$. Ce qui donne

$$x_0 = -x_1, \quad \text{et} \quad x_0 x_1 = -\frac{1}{2}.$$

D'ou $x_0 = \frac{-1}{\sqrt{2}}$, $x_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}$ et $A_0 = A_1 = \frac{\pi}{2}$.

# Polynômes orthogonaux

On définit le produit scalaire de deux polynômes $P$ et $Q$ par

$$< P, Q >= \int_a^b P(x)Q(x)\, w(x)\, dx$$

## définition

Une suite de polynômes $\{P_k\}_{k \in N}$ est une suite de polynômes orthogonaux si et seulement si

- le degré de $P_i$ est $i$,
- $< P_k, P_j >= 0, \quad \text{et} \quad j \neq k.$

On suppose que $P_i$ est unitaire, c'est à dire que $P_i(x) = x^i + \ldots.$

# Construction des Polynômes orthogonaux

## Propriété

Les polynômes orthogonaux vérifient les relations suivantes :
$\forall x \in [a, b]$,

- $P_{-1}(x) = 0$ et $P_0(x) = 1$
- $P_1(x) = x - \beta_0$, et $\beta_0 = \frac{\int_a^b x\, w(x)\, dx}{\int_a^b w(x)\, dx}$
- Les polynômes orthogonaux vérifient une relation de récurrence à trois termes,

$$P_{k+1}(x) = xP_k(x) - \beta_k P_k(x) - \alpha_k P_{k-1}(x)$$

avec

$$\beta_k = \frac{\int_a^b xP_k^2(x)\, w(x)\, dx}{\int_a^b P_k^2(x)\, w(x)\, dx}, \alpha_k = \frac{\int_a^b xP_k(x)\, P_{k-1}(x)\, w(x)\, dx}{\int_a^b P_{k-1}^2(x)\, w(x)\, dx}$$

# Construction des Polynômes orthogonaux (suite)

## Propriété

Les racines des polynômes orthogonaux sont réelles, distinctes et sont dans $]a, b[$,

Les $x_i$ de la formule de quadrature de Gauss sont les racines des polyômes de degré $n+1$ appartenant à la famille de polynômes orthogonaux sur l'intervalle $[a, b]$ par rapport à la fonction poids $w$.
Donc en fonction de l'intervalle, du poids $w$, on doit construire la suite $\{P_k\}$ des polynômes orthogonaux.
Pour calculer les $x_i$, il faut calculer les racines de $P_{n+1}$ et ensuite calculer les coéficients $A_i$.
Nous allons voir maintenant quelques exemples classiques:

# Les Polynômes orthogonaux de Legendre

## Définition

$[a, b] = [-1, 1]$, $w(x) = 1, \forall x \in [-1, 1]$.
Les polynômes ortogonaux de Legendre vérifient la relation de récurrence à trois termes :

$$(k+1)P_{k+1}(x) = (2k+1)xP_k(x) - kP_{k-1}(x), k = 1, 2, \ldots$$

avec $P_0(x) = 1$ et $P_1(x) = x$.

## Formule de Gauss-Legendre

$$\int_{-1}^{1} f(x)\, dx \quad = \sum_{i=0}^{n} A_i \, f(x_i) \, + E_Q(f).$$

avec $A_i = \frac{2(1-x_i^2)}{(n+1)^2[P_n(x_i)]^2}$ et $E_Q(f) = \frac{2^{2n+3}[(n+1)!]^4}{(2n+3)[(2n+2)!]^3} f^{(2n+2)}(\xi)$

# Les Polynômes orthogonaux de Laguerre

## Définition

$[a, b] = [0, \infty[, w(x) = e^{-x}, \forall x \in [0, \infty[$.
Les polynômes ortogonaux de Laguerre vérifient la relation de récurrence à trois termes :

$$(k+1)L_{k+1}(x) = (2k+1-x)L_k(x) - kL_{k-1}(x), k = 1, 2, \ldots$$

avec $L_0(x) = 1$ et $L_1(x) = 1 - x$.

## Formule de Gauss-Laguerre

$$\int_0^{\infty} f(x)\, e^{-x}\, dx \quad = \sum_{i=0}^{n} A_i\, f(x_i) + E_Q(f).$$

avec $A_i = \frac{x_i}{(n+1)^2 [L_n(x_i)]^2}$ et $E_Q(f) = \frac{[(n+1)!]^2}{(2n+2)!} f^{(2n+2)}(\theta)$

# Les Polynômes orthogonaux d'Hermite

## Définition

$[a, b] = ]-\infty, \infty[$, $w(x) = e^{-x^2}, \forall x \in ]-\infty, \infty[$.
Les polynômes ortogonaux d'Hermite vérifient la relation de récurrence à trois termes :

$$H_{k+1}(x) = 2xH_k(x) - 2kH_{k-1}(x), k = 1, 2, \ldots$$

avec $H_0(x) = 1$ et $H_1(x) = 2x$.

## Formule de Gauss-Hermite

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, e^{-x^2}\, dx \;\; = \sum_{i=0}^{n} A_i\, f(x_i) + E_Q(f).$$

avec $A_i = \frac{2^n n! \sqrt{\pi}}{(n+1)[H_n(x_i)]^2}$ et $E_Q(f) = \frac{\sqrt{\pi}(n+1)!}{2^{n+1}(2n+2)!} f^{(2n+2)}(\alpha)$

# Les Polynômes orthogonaux de Chybechev

## Définition

$[a, b] = [-1, 1]$, $w(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \forall x \in [-1, 1]$.

Les polynômes ortogonaux de Chybechev vérifient la relation de récurrence à trois termes :

$$T_{k+1}(x) = 2xT_k(x) - T_{k-1}(x), k = 1, 2, \ldots$$

avec $T_0(x) = 1$ et $T_1(x) = x$.

## Formule de Gauss-Chybechev

$$\int_{-1}^{1} f(x) \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{\pi}{n+1} \sum_{i=0}^{n} f(x_i) + E_Q(f).$$

avec $x_i = \cos\left[\frac{(2i+1)\pi}{2n+2}\right]$ et $E_Q(f) = \frac{2\pi}{2^{2n+2}(2n+2)!} f^{(2n+2)}(\beta)$